

بررسی تأثیر کانال‌های فیدینگ صاف بر عملکرد حالت دائم شبکه‌های تطبیقی با مشارکت نفوذی

اعظم خلیلی^۱، استادیار، امیر رستگاریان^۲، استادیار، وحید وحیدپور^۳، کارشناس ارشد، توحید یوسفی رضایی^۴، استادیار

۱- گروه مهندسی برق - دانشگاه ملایر - ملایر - ایران - a_khalili@malayeru.ac.ir

۲- گروه مهندسی برق - دانشگاه ملایر - ملایر - ایران - a_rastegar@malayeru.ac.ir

۳- گروه مهندسی برق - دانشگاه ملایر - ملایر - ایران - v_vahidpour@malayeru.ac.ir

۴- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه تبریز - تبریز - ایران - yousefi@tabrizu.ac.ir

چکیده: شبکه‌های تطبیقی نفوذی به عنوان روشی قدرتمند برای حل مسائل مربوط به تخمین توزیع شده شناخته می‌شوند. نتایج موجود بیان‌گر آن است که در صورت ایده‌آل بودن ارتباط بین گره‌های شبکه، الگوریتم‌های مبتنی بر شبکه تطبیقی نفوذی برای حل مسئله تخمین یک راه‌حل کاملاً کارآمد می‌باشند. با این حال، فرض ایده‌آل بودن لینک‌های بین گره‌های شبکه در عمل چندان دقیق نیست. در این مقاله به بررسی تأثیر کانال‌های فیدینگ صاف بر روی عملکرد حالت دائمی شبکه‌های تطبیقی با مشارکت نفوذی می‌پردازیم. بدین منظور از روش موسوم به بقای انرژی استفاده کرده و رفتار حالت دائم شبکه را برحسب معیارهای MSD و EMSE به دست می‌آوریم. همچنین محدوده پایداری شبکه برحسب بازه ضریب گام را به دست می‌آوریم. روابط به دست آمده نشان می‌دهد که برخلاف شبکه ایده‌آل، با کاهش مقدار ضریب گام، مقدار ناهایی خطا (خطای حالت دائم) افزایش می‌یابد. همچنین صحت روابط تئوری به دست آمده را با نتایج حاصل از شبیه‌سازی بررسی می‌نماییم.

واژه‌های کلیدی: شبکه‌های تطبیقی نفوذی، تخمین توزیع شده، حالت دائم، کانال فیدینگ.

On the Effects of Flat Fading Channels on the Steady-State Performance of Diffusion Adaptive Networks

Azam. Khalili, Assistant Professor¹, Amir Rastegarnia, Assistant Professor², Vahid Vahidpour, Master of Science³, Tohid Yousefi Rezaii, Assistant Professor⁴

1- Department of Electrical Engineering, University of Malayer, Malayer, Iran, Email: a.khalili@ieee.org

2- Department of Electrical Engineering, University of Malayer, Malayer, Iran, Email: a_rastegar@ieee.org

3- Department of Electrical Engineering, University of Malayer, Malayer, Iran, Email: v.vahidpour.eng@ieee.org

4- Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran, Email: Yousefi@tabrizu.ac.ir

Abstract: Adaptive networks are known as powerful solution for distributed estimation problems. It is shown in available works that, under the ideal link condition, diffusion adaptive networks are efficient solutions for distributed estimation. However, ideal link is not a practical assumption for many applications. Thus, this paper aims to study the steady-state performance of diffusion adaptive networks with flat fading channels. Using the energy conservation argument, we derive closed-form expressions for EMSE and MSD metrics. We also derive the required bound (in terms of the step size parameter) for stability of diffusion adaptive network with fading links. Our analysis shows that in this condition, steady-state curves are not monotonic increasing functions of step size. We provide simulation results to support the analysis.

Keywords: Diffusion adaptive networks, distributed estimation, steady state, fading channel.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۵/۰۳/۰۴

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۵/۰۵/۰۴

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۰۶/۲۵

نام نویسنده مسئول: اعظم خلیلی

نشانی نویسنده مسئول: ایران - ملایر - کیلومتر ۴ جاده اراک - دانشگاه ملایر - دانشکده فنی و مهندسی

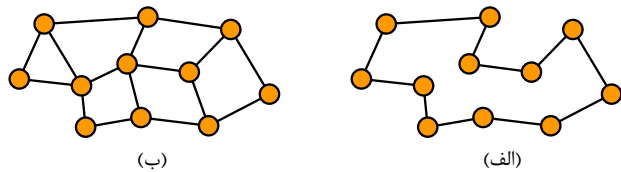
۱- مقدمه

تخمین یک پارامتر نامعلوم با استفاده از اندازه‌گیری‌های انجام‌شده توسط مجموعه‌ای از گره‌ها^۱ مسئله‌ای است که در کاربردهای مختلفی از جمله شبکه‌های سنسوری بی‌سیم^۲، سیستم‌های مخابراتی، کاربردهای نظامی، علوم کامپیوتر و سیستم‌های قدرت مطرح می‌گردد [۱]. اخیراً الگوریتم‌های توزیع‌شده تطبیقی (که با نام شبکه‌های تطبیقی^۳ نیز شناخته می‌شوند) برای حل مسئله تخمین توزیع‌شده مطرح شده‌اند [۲]. ویژگی‌های اصلی این الگوریتم‌ها، مشارکتی بودن، توزیعی بودن و همچنین تطبیقی بودن آن‌هاست. این ویژگی‌ها سبب می‌شود که هر گره بتواند از اطلاعات سایر گره‌ها برای تخمین پارامتر مطلوب استفاده نموده و محاسبات مربوط به الگوریتم تخمین در تمام شبکه پخش گردد. به علاوه هر گره قادر است بدون از پیش داشتن اطلاعات آماری موردنیاز برای حل، این اطلاعات را به صورت آنلاین محاسبه نماید. با توجه به قابلیت‌های اشاره‌شده، علاوه بر مسائل مربوط به تخمین توزیع‌شده، از شبکه‌های تطبیقی برای تصمیم‌سازی تطبیقی^۴ و همچنین مدل‌سازی سیستم‌های پیچیده بیولوژیکی نیز استفاده شده است [۳-۹].

در حالت کلی شبکه‌های تطبیقی با توجه به نوع مشارکت بین گره‌ها به صورت شبکه‌های تطبیقی افزایشی^۵ [۱۰-۱۳] و شبکه‌های تطبیقی نفوذی^۶ [۱۴-۲۰] تقسیم می‌شوند. در این نوع مشارکت یک مسیر همپلتون^۷ بین گره‌ها تعریف شده و هر گره فقط با گره قبل و گره بعد از خود در ارتباط می‌باشد. شبکه‌های تطبیقی نفوذی هر گره با تمام گره‌های مجاور خود در ارتباط بوده و می‌توانند با آن‌ها تبادل اطلاعات نمایند. در شکل ۱ انواع مشارکت مورداستفاده در شبکه‌های تطبیقی نشان داده شده است.

در کارهای اولیه مربوط به شبکه‌های تطبیقی [۱۰-۲۰]، ارتباط بین گره‌های موجود در شبکه ایده‌آل فرض شده است؛ بدین معنی که هنگام تبادل اطلاعات بین گره‌ها هیچ‌گونه خطایی رخ نمی‌دهد. عوامل مختلفی سبب می‌گردند که در حالت واقعی فرضیات فوق چندان صحیح نباشند. در [۲۱-۲۶] عملکرد شبکه‌های تطبیقی هنگامی که کانال بین گره‌ها به صورت لینک‌های نویزی^۸ مدل‌سازی می‌شود موردبررسی قرار گرفته است. نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که وجود لینک‌های نویزی نه تنها باعث کاهش کارایی شبکه‌های تطبیقی می‌شود، بلکه سبب می‌گردد که شبکه تطبیقی در این حالت رفتار کاملاً متفاوتی در مقایسه با حالت مربوط به شبکه با لینک‌های ایده‌آل و توپولوژی ثابت از خود نشان دهد.

همان‌طور که در مقدمه اشاره شد، تخمین توزیع‌شده با استفاده از شبکه‌های سنسوری بی‌سیم یکی از مهم‌ترین کاربردهای شبکه‌های تطبیقی می‌باشد. از طرفی، در شبکه‌های سنسوری بی‌سیم مدل‌سازی کانال‌های بین گره‌ها به صورت لینک‌های نویزی چندان دقیق نیست [۲۷-۳۱]. لذا نتایج به‌دست‌آمده در [۲۱-۲۶] را نمی‌توان برای ارزیابی عملکرد شبکه‌های تطبیقی در حضور کانال‌های فیدینگ تعمیم داد.



شکل ۱: انواع مشارکت بین گره‌ها: مشارکت افزایشی (الف) و مشارکت نفوذی (ب).

در [۳۲] عملکرد حالت دائم شبکه تطبیقی افزایشی مبتنی بر فیلتر تطبیقی LMS^۹ در حضور کانال‌های فیدینگ صاف موردبررسی قرار گرفته است. نتایج به‌دست‌آمده در [۳۲] نشان می‌دهد که وجود کانال‌های فیدینگ سبب تغییر اساسی در نحوه عملکرد شبکه تطبیقی افزایشی می‌گردد. در این مقاله، توجه خود را معطوف به شبکه تطبیقی نفوذی نموده و به بررسی عملکرد این شبکه در حضور کانال‌های فیدینگ صاف خواهیم پرداخت. بدین منظور با استفاده از روش موسوم به بقای انرژی^{۱۰} روابط تئوری برحسب معیارهای MSD^{۱۱} و EMSE^{۱۲} که توصیف‌کننده رفتار حالت دائم شبکه تطبیقی نفوذی با حضور کانال‌های فیدینگ به دست می‌آوریم. همچنین محدوده پایداری شبکه برحسب بازه ضریب گام^{۱۳} را به دست می‌آوریم. نتایج به‌دست‌آمده در این مقاله نشان می‌دهد که

- مطابق انتظار، وجود کانال‌های فیدینگ سبب کاهش شدید کارایی شبکه‌های تطبیقی نفوذی می‌گردد.
 - برخلاف شبکه ایده‌آل، با کاهش مقدار ضریب گام، مقدار نهایی خطا (خطای حالت دائم) افزایش می‌یابد.
 - حتی در حضور لینک‌های نویزی نیز می‌توان با انتخاب ضریب گام مناسب پایداری شبکه را تضمین نمود.
- برای بررسی صحت نتایج به‌دست‌آمده در این مقاله، رفتار یک شبکه تطبیقی نمونه با حضور کانال‌های فیدینگ صاف شبیه‌سازی شده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی به خوبی با نتایج به‌دست‌آمده مطابقت داشته و آن را تأیید می‌نماید.

ادامه مقاله حاضر بدین صورت تدوین شده است که در بخش دوم شبکه تطبیقی نفوذی به‌طور مختصر معرفی شده است. در بخش سوم به معرفی بیان مسئله پرداخته و تحلیل‌های به‌دست‌آمده ارائه شده است. در بخش چهارم نتایج شبیه‌سازی به‌منظور بررسی صحت روابط به‌دست‌آمده ارائه شده است. در نهایت، در بخش پنجم به معرفی نتایج حاصل از این مقاله پرداخته شده است.

۲- شبکه تطبیقی نفوذی

شبکه‌ای متشکل از N گره را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم مجموعه $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ معرف گره‌های موجود در این شبکه باشد. در هر لحظه از زمان i ، گره $k \in \mathcal{N}$ اطلاعاتی به صورت $\{d_{k,i}, \mathbf{u}_{k,i}\}$ را در اختیار دارد که در آن $d_{k,i}$ کمیت اسکالر اندازه‌گیری شده توسط گره و $\mathbf{u}_{k,i}$ بردار رگرسیون با ابعاد $1 \times M$ می‌باشد. با فرض یک مدل خطی، بین کمیت‌های یادشده و بردار \mathbf{w}^o رابطه زیر برقرار است:

چنانچه ضریب گام μ_k به اندازه کافی کوچک باشد در این صورت در تمام گره‌ها تخمین مناسبی از پارامتر \mathbf{w}^o به دست خواهد آمد.

۳- شبکه تطبیقی نفوذی با لینک‌های فیدینگ

۳-۱- بیان مسئله مورد بررسی

در الگوریتم بیان شده با رابطه (۷) لینک‌های موجود بین گره‌های شبکه ایده‌آل فرض شده است. بدین معنی که گره k تخمین‌های محلی گره‌های مجاور خود را بدون خطا دریافت می‌نماید. با این حال چنین فرضی چندان واقعی نبوده و برای کاربردهای واقعی (به‌ویژه در کاربردهای مربوط به شبکه‌های سنسوری بی‌سیم) مدل‌سازی لینک بین گره‌های شبکه به‌صورت کانال‌های بی‌سیم با محوشدگی صاف^{۱۶} منطقی‌تر است. چنین مدلی به‌ویژه در شبکه‌های سنسوری بی‌سیم بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. با در نظر گرفتن کانال‌های فیدینگ رابطه (۷) به‌صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$\begin{cases} \phi_k^{(i-1)} = c_{k,k} \psi_k^{(i-1)} + \sum_{\ell \in \mathcal{N}_k} c_{k,\ell} h_{k,\ell}(i) (\psi_\ell^{(i-1)} + \mathbf{q}_k^{(i)}) \\ \psi_k^{(i)} = \phi_k^{(i-1)} + \mu_k \mathbf{u}_{k,i}^* (d_k(i) - \mathbf{u}_{k,i} \phi_k^{(i-1)}) \end{cases} \quad (۸)$$

که در آن $h_{k,\ell}$ بیانگر مولفه ضریب کانال فیدینگ بین گره k و گره ℓ و مؤلفه نویز $\mathbf{q}_{k,\ell} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ بین گره k و گره ℓ می‌باشد. در ادامه به بررسی (تحلیل) عملکرد شبکه تطبیقی نفوذی با حضور کانال‌های فیدینگ صاف که با رابطه (۸) داده می‌شود می‌پردازیم. از این به بعد در سراسر مقاله منظور ما از فیدینگ مدل فیدینگ صاف خواهد بود.

۳-۲- تحلیل شبکه‌های نفوذی در حضور کانال‌های فیدینگ

برای تحلیل شبکه تطبیقی با لینک‌های فیدینگ ابتدا باید معیار (یا معیارهایی) را برای ارزیابی تعریف کرد. بدین منظور در این مقاله از معیارهای MSD و ESME استفاده خواهیم کرد که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\text{MSD}_k \triangleq \lim_{i \rightarrow \infty} E[\|\tilde{\psi}_{k-1}^{(i)}\|_2^2], \quad (۹)$$

$$\text{EMSE}_k \triangleq \lim_{i \rightarrow \infty} E[\|\tilde{\psi}_{k-1}^{(i)}\|_{\mathbf{R}_{\mathbf{u},k}}^2], \quad (۱۰)$$

که در آن $\tilde{\psi}_{k-1}^{(i)} = \mathbf{w}^o - \psi_{k-1}^{(i)}$ تعریف می‌شود. برای تحلیل ریاضی شبکه تطبیقی با لینک‌های فیدینگ از روش موسم به بقای انرژی استفاده خواهیم کرد که یک روش شناخته‌شده برای تحلیل به فیلترها و سیستم‌ها تطبیقی می‌باشد [۱۰]. ایده اصلی در این روش به دست آوردن رابطه‌ای است که نحوه تغییر بردار خطای $E[\|\tilde{\psi}_{k-1}^{(i)}\|_{\Sigma}^2]$ در زمان‌های مختلف را به ازای ماتریس‌های \mathbf{I} و $\mathbf{R}_{\mathbf{u},k}$ توصیف می‌کند. در ادامه، ابتدا کمیت‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \Psi^i &\triangleq \text{col}\{\psi_1^{(i)}, \dots, \psi_N^{(i)}\}, & \mathbf{U}_i &\triangleq \text{diag}\{\mathbf{u}_{1,i}, \dots, \mathbf{u}_{N,i}\}, \\ \Phi^i &\triangleq \text{col}\{\phi_1^{(i)}, \dots, \phi_N^{(i)}\}, & \mathbf{d}_i &\triangleq \text{col}\{d_1(i), \dots, d_N(i)\}, \\ \mathbf{v}_i &\triangleq \text{col}\{v_1(i), \dots, v_N(i)\}, & \mathbf{w}^{(o)} &\triangleq \text{col}\{\mathbf{w}^o, \dots, \mathbf{w}^o\}, \\ \mathbf{D} &\triangleq \text{diag}\{\mu_1 \mathbf{I}_M, \dots, \mu_N \mathbf{I}_M\}, & \mathbf{q}^i &\triangleq \text{col}\{\mathbf{q}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{q}_N^{(i)}\}. \end{aligned} \quad (۱۱)$$

$$d_{k,i} = \mathbf{u}_{k,i} \mathbf{w}^o + v_{k,i} \quad k \in \mathcal{N} \quad (۱)$$

در رابطه فوق $v_{k,i}$ مؤلفه نویز مشاهده می‌باشد که به‌صورت متغیر تصادفی گوسی با میانگین صفر و واریانس $\sigma_{v,k}^2$ در نظر گرفته می‌شود. هدف از به‌کارگیری این شبکه به دست آوردن تخمینی از پارامتر $\mathbf{w}^o \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ در هر گره با استفاده از اطلاعات موجود در تمام گره‌های شبکه می‌باشد. باید در نظر داشت که بردار \mathbf{w}^o می‌تواند از نظر فیزیکی معانی مختلفی داشته باشد. به‌طور مثال، در مسئله تخمین موقعیت هدف، بردار \mathbf{w}^o معرف موقعیت هدف در فضا می‌باشد. با در نظر گرفتن معیار میانگین مربعات خطا^{۱۴}، محاسبه تخمین پارامتر \mathbf{w}^o را می‌توان به‌صورت مسئله بهینه‌سازی زیر بیان کرد:

$$\arg \min_{\mathbf{w}} \left(\sum_{k=1}^N E[\|d_{k,i} - \mathbf{u}_{k,i} \mathbf{w}\|^2] \right) \quad (۲)$$

جواب بهینه مسئله فوق همان پارامتر مورد نظر یعنی \mathbf{w}^o است که می‌توان آن را برحسب آمارگان مربوط به اطلاعات شبکه به‌صورت زیر بیان کرد [۱۰]:

$$\mathbf{w}^o = \mathbf{R}_{\mathbf{u},k}^{-1} \mathbf{r}_{\text{du},k} \quad (۳)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u},k} = \sum_{k=1}^N E[\mathbf{u}_{k,i}^* \mathbf{u}_{k,i}], \quad \mathbf{r}_{\text{du},k} = \sum_{k=1}^N E[\mathbf{u}_{k,i}^* d_{k,i}] \quad (۴)$$

برای حل مسئله تخمین بیان شده در رابطه (۲) می‌توان از شبکه تطبیقی نفوذی استفاده کرد. برای شرح عملکرد شبکه تطبیقی نفوذی ابتدا فرض می‌کنیم که $\psi_{k,i}$ نشان‌دهنده تخمین محلی گره k از پارامتر \mathbf{w}^o در لحظه i باشد. در یک شبکه تطبیقی نفوذی، هر گره شبکه مانند گره k ابتدا با استفاده از تخمین محلی لحظه قبلی خود گره و همچنین تخمین‌های محلی موجود در گره‌های همسایه عبارت زیر را محاسبه می‌نماید:

$$\varphi_k^{(i-1)} = \sum_{\ell \in \mathcal{N}_k} c_{k,\ell} \psi_\ell^{(i-1)} \quad (۵)$$

که در آن \mathcal{N}_k معرف مجموعه همسایگان گره بوده و $c_{k,\ell} \in \mathbb{R}$ ضرایبی هستند که برای ترکیب تخمین‌های به‌دست‌آمده از گره‌های همسایه مورد استفاده قرار می‌گیرند. پس از محاسبه $\varphi_k^{(i-1)}$ ، گره k از $\varphi_k^{(i-1)}$ و نیز از اطلاعات موجود در خود گره یعنی $\{d_{k,i}, \mathbf{u}_{k,i}\}$ برای به‌روز کردن^{۱۵} تخمین $\psi_k^{(i)}$ استفاده می‌نماید. در صورت استفاده از فیلتر تطبیقی LMS رابطه به‌روز کردن تخمین $\psi_k^{(i)}$ در گره k به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\psi_k^{(i)} = \varphi_k^{(i-1)} + \mu_k \mathbf{u}_{k,i}^* (d_{k,i} - \mathbf{u}_{k,i} \varphi_k^{(i-1)}) \quad (۶)$$

لذا در شبکه تطبیقی نفوذی رابطه به‌روز کردن تخمین محلی در هر گره به‌صورت زیر داده می‌شود [۱۴]:

$$\begin{cases} \varphi_k^{(i-1)} = \sum_{\ell \in \mathcal{N}_k} c_{k,\ell} \psi_\ell^{(i-1)} \\ \psi_k^{(i)} = \varphi_k^{(i-1)} + \mu_k \mathbf{u}_{k,i}^* (d_k(i) - \mathbf{u}_{k,i} \varphi_k^{(i-1)}). \end{cases} \quad (۷)$$

دارای توزیع گوسی با میانگین صفر باشند. با در نظر گرفتن این فرض، ماتریس‌های کوواریانس را می‌توان به صورت $\mathbf{R}_u = E[\mathbf{U}_i^* \mathbf{U}_i] = \mathbf{T} \mathbf{\Lambda} \mathbf{T}^*$ تجزیه نمود که در آن $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\mathbf{\Lambda}_1, \dots, \mathbf{\Lambda}_N\}$ یک ماتریس قطری شامل مقادیر ویژه ماتریس کوواریانس $\mathbf{R}_{u,k} = \mathbf{T}_k \mathbf{\Lambda}_k \mathbf{T}_k^*$ بوده و $\mathbf{T} = \text{diag}\{\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_N\}$ ماتریس یکتا با خاصیت $\mathbf{T} \mathbf{T}^* = \mathbf{T}^* \mathbf{T} = \mathbf{I}$ می‌باشد. همچنین برای ادامه کار کمیات زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\Psi}}^i &= \mathbf{T}^* \boldsymbol{\Psi}^i, & \bar{\mathbf{U}}_i &= \mathbf{U}_i \mathbf{T}, & \bar{\boldsymbol{\Sigma}} &= \mathbf{T}^* \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{T}, \\ \bar{\mathbf{H}} &= \mathbf{T}^* \mathbf{H} \mathbf{T}, & \bar{\mathbf{G}}_i &= \mathbf{T}^* \mathbf{G}_i \mathbf{T}, & \bar{\mathbf{q}}^{i-1} &= \mathbf{T}^* \mathbf{q}^{i-1}, \\ \bar{\mathbf{Q}} &= \mathbf{T}^* \mathbf{Q} \mathbf{T}, & \bar{\mathbf{K}} &= \mathbf{T}^* \mathbf{K} \mathbf{T}, & \bar{\mathbf{D}} &= \mathbf{T}^* \mathbf{D} \mathbf{T} = \mathbf{D}, \\ \bar{\mathbf{L}} &= \mathbf{T}^* \mathbf{L} \mathbf{T}, & \bar{\mathbf{w}}^{(o)} &= \mathbf{T}^* \mathbf{w}^{(o)}, & \bar{\boldsymbol{\mathfrak{B}}} &= \mathbf{T}^* \boldsymbol{\mathfrak{B}} \mathbf{T} = \boldsymbol{\mathfrak{B}}. \end{aligned} \quad (20)$$

با استفاده از تعاریف فوق، روابط (۱۸) و (۱۹) به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$E[\|\bar{\boldsymbol{\Psi}}^i\|_{\bar{\boldsymbol{\Sigma}}}^2] = E[\|\bar{\boldsymbol{\Psi}}^{i-1}\|_{\bar{\boldsymbol{\Sigma}}}^2] + E[\mathbf{v}_i^* \bar{\mathbf{U}}_i \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{D} \bar{\mathbf{U}}_i^* \mathbf{v}_i] + E[\|\bar{\mathbf{q}}^{i-1}\|_{\bar{\mathbf{H}}}^2] + \|\bar{\mathbf{w}}^{(o)}\|_{\bar{\mathbf{K}}+\bar{\mathbf{L}}}^2 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}} &= \bar{\boldsymbol{\Sigma}} - E[\bar{\mathbf{U}}_i^* \bar{\mathbf{U}}_i] \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\Sigma}} - \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{D} E[\bar{\mathbf{U}}_i \bar{\mathbf{U}}_i^*] \\ &\quad + E[\bar{\mathbf{U}}_i^* \bar{\mathbf{U}}_i \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{D} \bar{\mathbf{U}}_i^* \bar{\mathbf{U}}_i] \\ \bar{\boldsymbol{\Sigma}}' &= E[\bar{\mathbf{G}}_i^* \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{G}}_i] \\ \bar{\mathbf{K}} &= E[(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{G}}_i)^* \bar{\mathbf{H}} (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{G}}_i)] \\ \bar{\mathbf{L}} &= E[\boldsymbol{\mathfrak{B}}^* \bar{\mathbf{G}}_i^* \bar{\mathbf{H}} (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{G}}_i)] \\ &\quad + E[(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{G}}_i)^* \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{G}}_i \boldsymbol{\mathfrak{B}}] \end{aligned} \quad (22)$$

از آنجایی که گشتاورهای موجود در (۲۱) و (۲۲) ساختار بلوکی و قطری دارند، لذا برای محاسبه آن‌ها از عملگر $\text{bvec}\{\cdot\}$ (پیوست الف)) و ضرب کرونکر بلوکی استفاده می‌کنیم. همچنین ویژگی‌های زیر برای انجام تحلیل حالت دائم^{۱۶} سودمند هستند.

برای هر ماتریس \mathbf{A} ، $\boldsymbol{\Sigma}$ و \mathbf{B} با ابعاد مناسب ویژگی‌های زیر برقرار است

$$\text{bvec}\{\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{B}\} = (\mathbf{B}^T \odot \mathbf{A}) \text{bvec}\{\boldsymbol{\Sigma}\}, \quad (23)$$

$$\text{Tr}(\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}) = \text{bvec}\{\mathbf{A}^T\}^T \text{bvec}\{\boldsymbol{\Sigma}\}. \quad (24)$$

با استفاده از $E[\bar{\mathbf{U}}_i^* \bar{\mathbf{U}}_i] = \boldsymbol{\Lambda}$ ، $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \text{bvec}\{\bar{\boldsymbol{\Sigma}}\}$ و ویژگی‌های فوق، همچنین با فرض $E[\bar{\mathbf{G}}_i] = \bar{\mathbf{G}}$ ، گشتاورهای مورد نیاز را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\text{bvec}\{\bar{\mathbf{G}}^* \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \bar{\mathbf{G}}\} = (\bar{\mathbf{G}}^T \odot \bar{\mathbf{G}}^*) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \text{bvec}\{\bar{\mathbf{G}}^* \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\Lambda}} \bar{\mathbf{G}}\} &= (\bar{\mathbf{G}}^T \odot \bar{\mathbf{G}}^*) \text{bvec}\{\mathbf{I}_{NM} \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{D} \mathbf{A}\} \\ &= (\bar{\mathbf{G}}^T \odot \bar{\mathbf{G}}^*) (\mathbf{A} \mathbf{D} \odot \mathbf{I}_{NM}) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\text{bvec}\{\bar{\mathbf{G}}^* \mathbf{A} \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \bar{\mathbf{G}}\} = (\bar{\mathbf{G}}^T \odot \bar{\mathbf{G}}^*) (\mathbf{I}_{NM} \odot \mathbf{A} \mathbf{D}) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \text{bvec}\{\bar{\mathbf{G}}^* E[\bar{\mathbf{U}}_i^* \bar{\mathbf{U}}_i \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{D} \bar{\mathbf{U}}_i^* \bar{\mathbf{U}}_i] \bar{\mathbf{G}}\} \\ = (\bar{\mathbf{G}}^T \odot \bar{\mathbf{G}}^*) (\mathbf{D} \odot \mathbf{D}) \text{bvec}\{\mathbf{A}\}. \end{aligned} \quad (28)$$

در رابطه (۲۸)، $\mathbf{A} \triangleq E[\bar{\mathbf{U}}_i^* \bar{\mathbf{U}}_i \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \bar{\mathbf{U}}_i^* \bar{\mathbf{U}}_i]$ یک ماتریس بلوکی به صورت $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{kl}]$ می‌باشد. برای محاسبه $\text{bvec}\{\mathbf{A}\}$ ، باید ابتدا تمام

از آنجایی که $\{\mathbf{q}_{k,\ell}^{(i)}\}$ از نظر زمانی و مکانی دارای توزیع یکسان و مستقل از هم می‌باشند، لذا داریم:

$$\mathbf{Q} \triangleq E[\mathbf{q}(\mathbf{q}^*)^*] = \text{diag}\{\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_N\}. \quad (12)$$

با استفاده از مدل مشاهدات $d_k(i) = \mathbf{u}_{k,i} \mathbf{w}^{(o)} + v_k(i)$ و تعاریف ارائه شده در (۱۱) داریم:

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{U}_i \mathbf{w}^{(o)} + \mathbf{v}_i, \quad (13)$$

حال می‌توانیم رابطه (۸) را به فرم روابط فضای حالت^{۱۷} زیر بیان کنیم:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}^{i-1} &= \mathbf{G}_i \boldsymbol{\Psi}^{i-1} + \mathbf{q}^{i-1} \\ \boldsymbol{\Psi}^i &= \boldsymbol{\phi}^{i-1} + \mathbf{D} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{d}_i - \mathbf{U}_i \boldsymbol{\phi}^{i-1}) \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن ماتریس ضرایب فیدینگ لینک‌های بین تمام گره‌های شبکه است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} c_{11} & h_{12}(i)c_{12} & \dots & h_{1N}c_{1N} \\ \vdots & c_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ h_{N1}(i)c_{N1} & \dots & \dots & c_{NN} \end{bmatrix} \quad (15)$$

رابطه (۱۴) را می‌توانیم به صورت مختصر زیر بیان کنیم:

$$\boldsymbol{\Psi}^i = \mathbf{G}_i \boldsymbol{\Psi}^{i-1} + \mathbf{q}^{i-1} + \mathbf{D} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{d}_i - \mathbf{U}_i \mathbf{G}_i \boldsymbol{\Psi}^{i-1} - \mathbf{U}_i \mathbf{q}^{i-1}), \quad (16)$$

با کم کردن مقدار $\mathbf{w}^{(o)}$ از طرفین رابطه (۱۶) و با استفاده از مدل (۱۳) داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\Psi}}^i &= \mathbf{G}_i \tilde{\boldsymbol{\Psi}}^{i-1} + (\mathbf{I} - \mathbf{G}_i) \mathbf{w}^{(o)} - \mathbf{q}^{i-1} \\ &\quad - \mathbf{D} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i \mathbf{w}^{(o)} + \mathbf{v}_i - \mathbf{U}_i \mathbf{G}_i \tilde{\boldsymbol{\Psi}}^{i-1} - \mathbf{U}_i \mathbf{q}^{i-1}) \\ &= \mathbf{G}_i \tilde{\boldsymbol{\Psi}}^{i-1} + (\mathbf{I} - \mathbf{G}_i) \mathbf{w}^{(o)} - \mathbf{D} \mathbf{U}_i^* \mathbf{U}_i \mathbf{G}_i \tilde{\boldsymbol{\Psi}}^{i-1} - \mathbf{D} \mathbf{U}_i^* \mathbf{v}_i \\ &\quad - \mathbf{D} \mathbf{U}_i^* \mathbf{U}_i (\mathbf{I} - \mathbf{G}_i) \mathbf{w}^{(o)} - \mathbf{q}^{i-1} + \mathbf{D} \mathbf{U}_i^* \mathbf{U}_i \mathbf{q}^{i-1} \end{aligned} \quad (17)$$

چنانچه نرم وزن دار^{۱۸} طرفین رابطه (۱۷) را به دست آورده و سپس میانگین آماری طرفین رابطه به دست آمده را محاسبه نماییم خواهیم داشت:

$$E[\|\tilde{\boldsymbol{\Psi}}^i\|_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}}^2] = E[\|\tilde{\boldsymbol{\Psi}}^{i-1}\|_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}}^2] + E[\mathbf{v}_i^* \mathbf{U}_i \mathbf{D} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{D} \mathbf{U}_i^* \mathbf{v}_i] + E[\|\mathbf{q}^{i-1}\|_{\tilde{\mathbf{H}}}^2] + \|\mathbf{w}^{(o)}\|_{\tilde{\mathbf{K}}+\tilde{\mathbf{L}}}^2 \quad (18)$$

که در آن ماتریسی است که در رابطه $E[\tilde{\boldsymbol{\Psi}}^{i-1}] = \boldsymbol{\mathfrak{B}} \mathbf{w}^{(o)}$ صدق می‌نماید و همچنین داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \boldsymbol{\Sigma} - E[\mathbf{U}_i^* \mathbf{U}_i] \mathbf{D} \boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{D} E[\mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^*] \\ &\quad + E[\mathbf{U}_i^* \mathbf{U}_i \mathbf{D} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{D} \mathbf{U}_i^* \mathbf{U}_i] \\ \boldsymbol{\Sigma}' &= E[\mathbf{G}_i^* \mathbf{H} \mathbf{G}_i] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mathbf{K} = E[(\mathbf{I} - \mathbf{G}_i)^* \mathbf{H} (\mathbf{I} - \mathbf{G}_i)]$$

$$\mathbf{L} = E[\boldsymbol{\mathfrak{B}}^* \mathbf{G}_i^* \mathbf{H} (\mathbf{I} - \mathbf{G}_i)] + E[(\mathbf{I} - \mathbf{G}_i)^* \mathbf{H} \mathbf{G}_i \boldsymbol{\mathfrak{B}}]$$

به منظور محاسبه کمیتهای MSD و EMSE از روابط (۱۸) و (۱۹) باید گشتاورهای موجود در این روابط محاسبه شوند. برای سادگی تحلیل ریاضی، در ادامه فرض می‌کنیم که بردارهای رگرسیون

$$\text{bvec}\{\bar{\mathbf{K}}\} = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{G}})^T \odot (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{G}})^* \mathbf{S} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (۴۱)$$

$$\text{bvec}\{\bar{\mathbf{L}}\} = \left[(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{G}})^T \odot (\bar{\mathbf{G}} \mathbf{B})^* + (\bar{\mathbf{G}} \mathbf{B})^T \odot (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{G}})^* \right] \mathbf{S} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (۴۲)$$

خواهیم داشت:

$$E[\|\bar{\Psi}^i\|_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^2] = E[\|\bar{\Psi}^{i-1}\|_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^2] + g \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (۴۳)$$

$$\bar{\mathbf{F}} = (\bar{\mathbf{G}}^T \odot \bar{\mathbf{G}}^*) \mathbf{S}. \quad (۴۴)$$

که در رابطه‌ی (۴۳) و (۴۴) کمیت‌های g و \mathbf{S} عبارت‌اند از:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{I}_{N^2 M^2} - (\mathbf{I}_{NM} \odot \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{D}) - (\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{D} \odot \mathbf{I}_{NM}) + (\mathbf{D} \odot \mathbf{D}) \mathbf{A}]. \quad (۴۵)$$

$$g = \mathbf{b}^T + \text{bvec}\{\bar{\mathbf{Q}}^T\}^T \mathbf{S} + \text{bvec}\{\mathcal{W}^T\}^T [(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{G}})^T \odot (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{G}})^* + (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{G}})^T \odot (\bar{\mathbf{G}} \mathbf{B})^* + (\bar{\mathbf{G}} \mathbf{B})^T \odot (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{G}})^*] \mathbf{S} \quad (۴۶)$$

در ادامه، از روابط (۳۹) و (۴۰) برای به دست آوردن روابط حالت دائم شبکه تطبیقی نفوذی با لینک‌های نویزی استفاده خواهیم نمود.

۳-۳- تحلیل حالت دائم

برای تحلیل حالت دائم شبکه تطبیقی نفوذی با لینک‌های نویزی، ابتدا مقادیر MSD نهایی شبکه و همچنین EMSE نهایی شبکه را محاسبه می‌کنیم. کمیت‌های یادشده به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\text{MSD}^{\text{Network}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \eta_k = \frac{1}{N} \lim_{i \rightarrow \infty} E[\|\bar{\Psi}^i\|_{\mathbf{I}}^2], \quad (۴۷)$$

$$\text{EMSE}^{\text{Network}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \zeta_k = \frac{1}{N} \lim_{i \rightarrow \infty} E[\|\bar{\Psi}^i\|_{\boldsymbol{\Lambda}}^2], \quad (۴۸)$$

در حالت دائم، یعنی وقتی $i \rightarrow \infty$ میل می‌کند، داریم $E[\|\bar{\Psi}^i\|^2] = E[\|\bar{\Psi}^{i-1}\|^2]$ و لذا زمانی که شبکه به حالت نهایی خود رسیده باشد، رابطه (۴۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$E[\|\bar{\Psi}^{\infty}\|_{(\mathbf{I}-\bar{\mathbf{F}})\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^2] = g \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \text{ as } i \rightarrow \infty \quad (۴۹)$$

حال با انتخاب مقادیر مناسب برای $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ می‌توان کمیت‌های MSD، EMSE و MSE را به دست آورد. با انتخاب $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ به طوری که در رابطه $\text{MSD}(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{F}})\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{r}$ صدق کند، می‌توان به عبارت مورد نظر برای دست یافت:

$$\text{MSD}^{\text{Network}} = \frac{1}{N} g (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{F}})^{-1} \mathbf{r}, \quad (۵۰)$$

که در آن $\mathbf{r} = \text{bvec}\{\mathbf{I}_{NM}\}$ است. به طور مشابه با انتخاب $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ به طوری که در رابطه $(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{F}})\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda$ صدق کند، می‌توان به عبارت مورد نظر برای EMSE دست یافت:

$$\text{EMSE}^{\text{Network}} = \frac{1}{N} g (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{F}})^{-1} \lambda, \quad (۵۱)$$

که در آن $\lambda = \text{bvec}\{\boldsymbol{\Lambda}\}$ می‌باشد. روابط (۵۰) و (۵۱) معرف مقادیر MSD و EMSE نهایی شبکه هستند. علاوه بر رفتار حالت دائم کل

بلوک‌های ماتریس \mathbf{A} محاسبه شوند. برای $k\ell$ امین بلوک از ماتریس \mathbf{A} داریم:

$$\mathbf{A}_{k\ell} = E[\bar{\mathbf{u}}_{k,i}^* \bar{\mathbf{u}}_{k,i} \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_{k\ell} \bar{\mathbf{u}}_{\ell,i}^* \bar{\mathbf{u}}_{\ell,i}] = \begin{cases} \boldsymbol{\Lambda}_k \text{Tr}(\boldsymbol{\Lambda}_k \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_{kk}) + \gamma \boldsymbol{\Lambda}_k \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_{kk} \boldsymbol{\Lambda}_k, & k = \ell \\ \boldsymbol{\Lambda}_k \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_{k\ell} \boldsymbol{\Lambda}_\ell, & k \neq \ell \end{cases} \quad (۲۹)$$

با توجه به رابطه فوق، برای $\text{vec}\{\mathbf{A}_{k\ell}\}$ داریم:

$$\mathbf{a}_{k\ell} = \text{vec}\{\mathbf{A}_{k\ell}\} = \begin{cases} (\boldsymbol{\Lambda}_k \boldsymbol{\Lambda}_k^T + \gamma \boldsymbol{\Lambda}_k \otimes \boldsymbol{\Lambda}_k) \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{kk}, & k = \ell \\ (\boldsymbol{\Lambda}_k \otimes \boldsymbol{\Lambda}_\ell) \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{k\ell}, & k \neq \ell \end{cases} \quad (۳۰)$$

مقادیر $\mathbf{a}_{k\ell}$ را در یک بردار به صورت زیر جمع‌آوری می‌کنیم:

$$\mathbf{a}_\ell = [\mathbf{a}_{\ell\ell}, \mathbf{a}_{2\ell}, \dots, \mathbf{a}_{k\ell}, \dots, \mathbf{a}_{N\ell}]^T \triangleq \mathcal{A}_\ell \bar{\boldsymbol{\sigma}}_\ell, \quad (۳۱)$$

که در آن داریم:

$$\mathcal{A}_\ell = \text{diag}\{\boldsymbol{\Lambda}_1 \otimes \boldsymbol{\Lambda}_\ell, \dots, \boldsymbol{\Lambda}_\ell \boldsymbol{\Lambda}_\ell^T + \gamma \boldsymbol{\Lambda}_\ell \otimes \boldsymbol{\Lambda}_\ell, \dots, \boldsymbol{\Lambda}_N \otimes \boldsymbol{\Lambda}_\ell\}. \quad (۳۲)$$

با توجه به روابط فوق، $\text{bvec}\{\mathbf{A}\}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{bvec}\{\mathbf{A}\} = \text{col}\{\mathcal{A}_1 \bar{\boldsymbol{\sigma}}_1, \mathcal{A}_2 \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2, \dots, \mathcal{A}_N \bar{\boldsymbol{\sigma}}_N\} = \mathcal{A} \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (۳۳)$$

که در آن $\mathcal{A} = \text{diag}\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_N\}$ می‌باشد. برای سایر گشتاورهای مورد نیاز داریم:

$$E[\mathbf{v}_i^* \bar{\mathbf{U}}_i \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{U}}_i^* \mathbf{v}_i] = \text{Tr}(\boldsymbol{\Lambda}_v E[\bar{\mathbf{U}}_i \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{U}}_i^*]) = \mathbf{b}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (۳۴)$$

در رابطه (۳۴)، $\boldsymbol{\Lambda}_v = \text{diag}\{\sigma_{v,1}^2, \sigma_{v,2}^2, \dots, \sigma_{v,N}^2\}$ ، و $\mathbf{R}_v = \boldsymbol{\Lambda}_v \odot \mathbf{I}_M$ و نویزی را محاسبه می‌کنیم.

$$E[(\bar{\mathbf{q}}^{i-1})^* \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \bar{\mathbf{q}}^{i-1}] = \text{Tr}(E[\bar{\mathbf{q}}^{i-1} (\bar{\mathbf{q}}^{i-1})^*] \bar{\boldsymbol{\Sigma}}) = \text{Tr}(\bar{\mathbf{Q}} \bar{\boldsymbol{\Sigma}}) = \text{bvec}\{\bar{\mathbf{Q}}^T\}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (۳۵)$$

$$E[(\bar{\mathbf{q}}^{i-1})^* \bar{\mathbf{U}}_i^* \bar{\mathbf{U}}_i \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \bar{\mathbf{q}}^{i-1}] = \text{Tr}(E[\bar{\mathbf{q}}^{i-1} (\bar{\mathbf{q}}^{i-1})^*] E[\bar{\mathbf{U}}_i^* \bar{\mathbf{U}}_i] \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\Sigma}}) = \text{Tr}(\bar{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\Sigma}}) = \text{bvec}\{\bar{\mathbf{Q}}^T\}^T (\mathbf{I}_{NM} \odot \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{D}) \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (۳۶)$$

$$E[(\bar{\mathbf{q}}^{i-1})^* \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{U}}_i^* \bar{\mathbf{U}}_i \bar{\mathbf{q}}^{i-1}] = \text{bvec}\{\bar{\mathbf{Q}}^T\}^T (\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{D} \odot \mathbf{I}_{NM}) \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (۳۷)$$

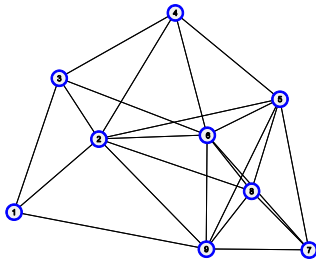
$$E[(\bar{\mathbf{q}}^{i-1})^* \bar{\mathbf{U}}_i^* \bar{\mathbf{U}}_i \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{U}}_i^* \bar{\mathbf{U}}_i \bar{\mathbf{q}}^{i-1}] = \text{Tr}(\bar{\mathbf{Q}} E[\bar{\mathbf{U}}_i^* \bar{\mathbf{U}}_i \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{U}}_i^* \bar{\mathbf{U}}_i]) = \text{bvec}\{\bar{\mathbf{Q}}^T\}^T (\mathbf{D} \odot \mathbf{D}) \mathcal{A} \bar{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (۳۸)$$

با جایگذاری گشتاورهای محاسبه‌شده فوق در روابط (۲۱) و (۲۲) و همچنین تعریف کمیت ماتریسی $\boldsymbol{\mathcal{W}} = \bar{\mathbf{w}}^{(o)} (\bar{\mathbf{w}}^{(o)})^* = \mathbf{w}^{(o)} (\mathbf{w}^{(o)})^*$ ، داریم:

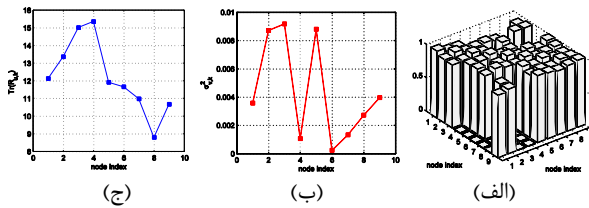
$$E[\|\bar{\Psi}^i\|_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^2] = E[\|\bar{\Psi}^{i-1}\|_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^2] + \mathbf{b}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \text{bvec}\{\bar{\mathbf{Q}}^T\}^T \mathbf{S} \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \text{Tr}\{\boldsymbol{\mathcal{W}}(\bar{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{L}})\} \quad (۳۹)$$

$$\bar{\mathbf{F}} = (\bar{\mathbf{G}}^T \odot \bar{\mathbf{G}}^*) [\mathbf{I}_{N^2 M^2} - (\mathbf{I}_{NM} \odot \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{D}) - (\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{D} \odot \mathbf{I}_{NM}) + (\mathbf{D} \odot \mathbf{D}) \mathbf{A}] \quad (۴۰)$$

با محاسبه‌ی مقادیر $\text{bvec}\{\bar{\mathbf{K}}\}$ ، $\text{bvec}\{\bar{\mathbf{L}}\}$



شکل ۲: شبکه نفوذی مورد استفاده برای انجام شبیه‌سازی.



شکل ۳: یک نمونه از ماتریس G_i (الف)، مقادیر واریانس نویز مشاهدات (ب) و مقادیر $\text{Tr}(\mathbf{R}_{u,k})$ (ج).

باید توجه داشت که به ازای $m_{k,\ell} = 0$ شرایط پایداری شبکه تطبیقی نفوذی با لینک‌های ایده‌آل حاصل می‌گردد. همان‌طور که از رابطه فوق معلوم می‌گردد، با انتخاب مناسب ضریب گام، همگرایی شبکه تطبیقی نفوذی با لینک‌های فیدینگ تضمین می‌گردد.

۴- شبیه‌سازی

در این بخش نتایج حاصل از شبیه‌سازی شبکه تطبیقی نفوذی با لینک‌های فیدینگ را با روابط تئوری مقایسه کرده و نشان می‌دهیم که روابط به‌دست‌آمده به‌خوبی می‌توانند رفتار این شبکه‌ها را که دارای لینک‌های نویزی هستند، پیش‌بینی کنند. به‌عبارت‌دیگر، روابط استخراج‌شده به‌خوبی با شبیه‌سازی‌های انجام‌شده همخوانی دارند. بدین منظور شبکه‌ای متشکل از $N=9$ گره را در نظر می‌گیریم که برای تخمین پارامتر $\mathbf{w}^o = \mathbf{1}_M / \sqrt{M}$ به ازای $M=4$ پیاده‌سازی شده است. توپولوژی شبکه مورد استفاده در شکل ۲ نشان داده شده است. بردارهای رگرسیون $\mathbf{u}_{k,i}$ در هر گره (به‌صورت مستقل از سایر گره‌ها) از توزیع گوسی انتخاب می‌شوند به‌طوری‌که هر ماتریس کوواریانس $\mathbf{R}_{u,k}$ دارای گستره مقادیر ویژه برابر $\rho=5$ می‌باشد. واریانس نویز مشاهدات برابر $\sigma_{v,k}^2 \in (0, 10^{-2})$ بوده و برای الگوریتم DILMS مقدار ضریب گام $\mu=0.03$ انتخاب شده است. برای مدل-سازی فیدینگ صاف فرض می‌شود که $h_{k,\ell}$ دارای توزیع رابلی با میانگین ۱ می‌باشند. ماتریس کوواریانس نویز لینک‌ها برابر $\mathbf{Q}_k = 10^{-4} \mathbf{I}_4$ (بیانگر ماتریس همانی با بعد $M \times M$ است) فرض شده است. در شکل ۳ مقادیر $\text{Tr}[\mathbf{R}_{u,k}]$ ، واریانس نویز مشاهدات و یک نمونه از ماتریس \mathbf{G}_i نشان داده شده است.

شبکه، می‌توان رفتار حالت دائم در هر گره را نیز با استفاده از روابط (۳۹) و (۴۰) به‌صورت زیر به دست آورد:

$$\text{MSD}_k = g(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{F}})^{-1} \text{bvec}\{\mathbf{J}_{\mathbf{F},k}\}, \quad (52)$$

$$\text{EMSE}_k = g(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{F}})^{-1} \text{bvec}\{\mathbf{J}_{\lambda,k}\}, \quad (53)$$

که در روابط فوق داریم:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{F},k} = \text{diag}\{\mathbf{0}_{(k-1)M}, \mathbf{I}_M, \mathbf{0}_{(N-k)M}\}, \quad (54)$$

$$\mathbf{J}_{\lambda,k} = \text{diag}\{\mathbf{0}_{(k-1)M}, \mathbf{\Lambda}_k, \mathbf{0}_{(N-k)M}\}. \quad (55)$$

در ادامه، منحنی‌های آموزش شبکه تطبیقی نفوذی با لینک‌های نویزی را به دست می‌آوریم.

۳-۴- پایداری به مفهوم میانگین

با داشتن رابطه‌ی (۱۷) به بررسی شرایط پایداری به مفهوم میانگین می‌پردازیم. با اعمال عملگر امید ریاضی از طرفین رابطه (۱۷)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E[\tilde{\Psi}^i] &= GE[\tilde{\Psi}^{i-1}] - DE[\mathbf{U}_i^* \mathbf{U}_i] GE\tilde{\Psi}^{i-1} \\ &\quad + (\mathbf{I} - G)\mathbf{w}^{(o)} - DE[\mathbf{U}_i^* \mathbf{U}_i](\mathbf{I} - G)\mathbf{w}^{(o)} \\ &= GE[\tilde{\Psi}^{i-1}] - \mathbf{DR}_u GE[\tilde{\Psi}^{i-1}] \\ &\quad + (\mathbf{I} - G)\mathbf{w}^{(o)} - \mathbf{DR}_u(\mathbf{I} - G)\mathbf{w}^{(o)} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{DR}_u)GE[\tilde{\Psi}^{i-1}] + (\mathbf{I} - \mathbf{DR}_u)(\mathbf{I} - G)\mathbf{w}^{(o)} \end{aligned} \quad (56)$$

به‌منظور تأمین همگرایی رابطه‌ی (۵۶)، ماتریس ضریب $(\mathbf{I} - \mathbf{DR}_u)G$ باید پایدار باشد. به‌عبارت‌دیگر $\rho\{(\mathbf{I} - \mathbf{DR}_u)G\} < 1$ باشد. از قبل می‌دانیم برای هر ماتریس X ، $\rho(X) < \|X\|$ ، بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \rho\{(\mathbf{I} - \mathbf{DR}_u)G\} &\leq \|(\mathbf{I} - \mathbf{DR}_u)G\| \\ &\leq \|(\mathbf{I} - \mathbf{DR}_u)\| \|G\| \\ &= \rho(\mathbf{I} - \mathbf{DR}_u) \rho(G) \end{aligned} \quad (57)$$

تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{G} \triangleq [m_{k,\ell}]_{N \times N} = \begin{cases} c_{k,k} & k = \ell \\ c_{k,\ell} E[h_{k,\ell}(i)] & k \neq \ell \end{cases} \quad (58)$$

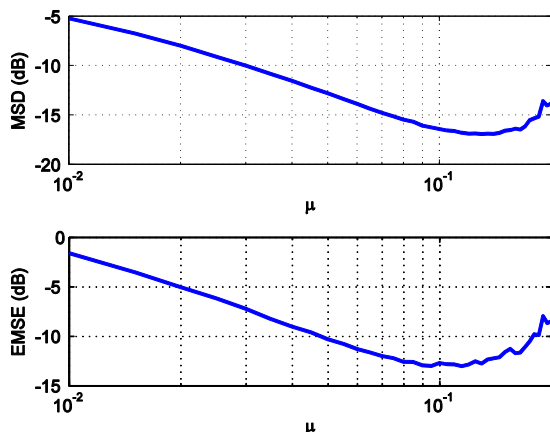
جهت تضمین شرط $\rho\{(\mathbf{I} - \mathbf{DR}_u)G\} < 1$ ، تنها کافی است $\rho\{(1 - \mu_k \mathbf{R}_{u,k})m_{k,\ell}\} < 1$ برقرار باشد که این شرط را می‌توان برحسب مقادیر ویژه $\mathbf{R}_{u,k}$ به‌صورت زیر نوشت:

$$\rho\{(1 - \mu_k \lambda\{\mathbf{R}_{u,k}\})m_{k,\ell}\} < 1 \quad (59)$$

بنابراین اگر مقدار μ_k به‌گونه‌ای انتخاب شود که

$$\max\left\{0, \frac{m_{k,\ell} - 1}{m_{k,\ell} \lambda_{\min}\{\mathbf{R}_{u,k}\}}\right\} < \mu_k < \frac{m_{k,\ell} + 1}{m_{k,\ell} \lambda_{\max}\{\mathbf{R}_{u,k}\}} \quad (60)$$

همگرایی $E[\tilde{\Psi}^i]$ به مفهوم میانگین تضمین می‌شود.



شکل ۶: منحنی‌های MSD و EMSE حاصل از شبیه‌سازی به ازای مقادیر مختلف ضریب گام.

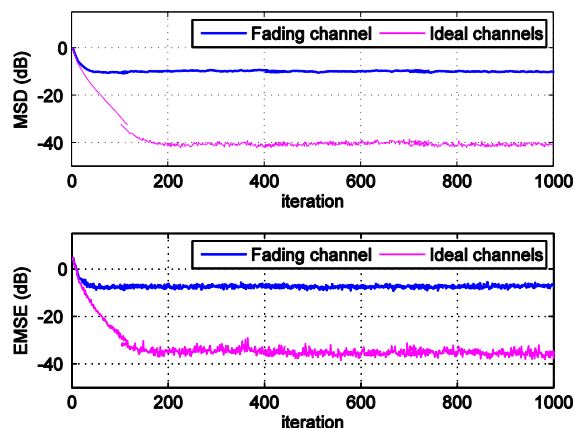
در شکل ۶ منحنی‌های MSD و EMSE حاصل از شبیه‌سازی به ازای مقادیر مختلف ضریب گام نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، برخلاف حالت مربوط به لینک‌های ایده‌آل منحنی‌های به‌دست‌آمده (مقدار نهایی MSD و EMSE) برحسب ضریب گام تابعی افزایشی یکتا نیستند.

۵- نتیجه

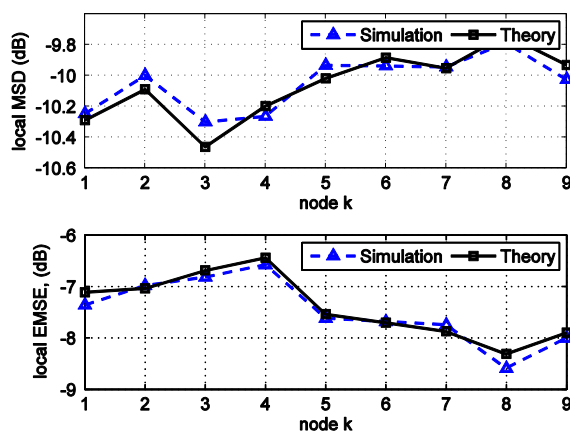
در این مقاله به بررسی رفتار حالت دائم شبکه‌های تطبیقی نفوذی با حضور لینک‌های فیدینگ صاف پرداخته شد. بدین منظور ضمن معرفی مدل ریاضی برای شبکه تطبیقی با حضور لینک‌های فیدینگ، با استفاده از روش بقای انرژی، روابط مربوط به کمیت (معیار) های MSD و EMSE استخراج شده و شرط پایداری شبکه نفوذی در این حالت استخراج گردید. با توجه به تطبیق روابط به‌دست‌آمده با نتایج شبیه‌سازی، صحت روابط تئوری به‌دست‌آمده تأیید گردید. در کارهای آینده به تأثیر سایر مدل‌های فیدینگ بر کارایی شبکه تطبیقی نفوذی پرداخته خواهد شد.

مراجع

- [1] D. Estrin, G. Pottie, and M. Srivastava, "Instrumenting the world with wireless sensor networks," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing (ICASSP)*, Salt Lake City, UT, pp. 2033–2036, 2001.
- [2] A. H. Sayed, "Adaptive networks," *Proceedings of the IEEE*, vol. 102, no. 4, pp. 460–497, 2014.
- [3] J. Li and A. H. Sayed, "Modeling bee swarming behavior through diffusion adaptation with asymmetric information sharing," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2012:18, doi:10.1186/1687-6180-2012-18, 2012.
- [4] F. Cattivelli and A. H. Sayed, "Modeling bird flight formations using diffusion adaptation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59, no. 5, pp. 2038–2051, 2011.
- [5] J. Chen, X. Zhao, and A. H. Sayed, "Bacterial motility via diffusion adaptation," *Proc. 44th Asilomar Conference on*



شکل ۴: منحنی‌های آموزش شبکه برحسب معیارهای MSD و EMSE در دو حالت مختلف شامل لینک‌های ایده‌آل و لینک‌های فیدینگ.



شکل ۵: مقایسه مقادیر حاصل از شبیه‌سازی و تئوری کمیت‌های MSD و EMSE.

برای به دست آوردن مقادیر نهایی کمیت‌های MSD و EMSE شبکه تطبیقی نفوذی با تعداد ۱۰۰۰ تکرار اجرا شده و از مقدار نهایی کمیت‌های فوق متوسط گیری شده است. این شبیه‌سازی ۱۰۰ مرتبه تکرار شده و از نتایج به‌دست‌آمده در تمام شبیه‌سازی‌ها برای رسم منحنی‌های ارائه‌شده متوسط‌گیری شده است. در شکل ۴ منحنی‌های آموزشی شبکه تطبیقی نفوذی برحسب MSD و EMSE برای دو حالت مختلف شامل لینک‌های ایده‌آل و لینک‌های فیدینگ نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل ۴ مشخص است وجود لینک‌های فیدینگ کارایی شبکه تطبیقی نفوذی را به‌شدت کاهش می‌دهد.

در شکل ۵ مقادیر نهایی کمیت‌های MSD و EMSE شبکه تطبیقی نفوذی شامل مقادیر حاصل از روابط تئوری استخراج شده و نتایج شبیه‌سازی شبکه نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل ۵ مشخص است، منحنی‌های مربوط به روابط تئوری استخراج شده به‌خوبی با نتایج شبیه‌سازی انجام‌شده مطابقت دارند. این مسئله صحت روابط به‌دست‌آمده را تأیید می‌کند.

- Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 26, no. 2, pp. 171–180, 2011.
- [24] A. Khalili, M.A. Tinati, A. Rastegarnia, J.A. Chambers, “Steady-state analysis of diffusion LMS adaptive networks with noisy links,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, no. 2, pp. 974–979, 2012.
- [25] X. Zhao, S. Tu, A. H. Sayed, “Diffusion adaptation over networks under imperfect information exchange and non-stationary data,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, no. 7, pp. 3460–3475, 2012.
- [26] A. Khalili, A. Rastegarnia, WM Bazzi, Z. Yang, “Diffusion adaptive networks with imperfect communications: link failure and channel noise,” *IET Signal Processing*, vol. 8, no. 1, pp. 59–66, 2014.
- [27] R. Abdoolee and B. Champagne, “Diffusion LMS algorithms for sensor networks over non-ideal inter-sensor wireless channels,” in *Proc. Int. Conf. Distributed Comput. Sens. Syst. Workshops*, pp. 1-6, 2011
- [28] M. K. Banavar, C. Tepedelenlioglu, and A. Spanias, “Performance of distributed estimation over multiple access fading channels with partial feedback,” in *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech Signal Process. (ICASSP)*, pp. 2253–2256, 2008.
- [29] S. Cui, J. Xiao, A. Goldsmith, Z.-Q. Luo, and H. V. Poor, “Estimation diversity and energy efficiency in distributed sensing,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 9, pp. 4683–4695, 2007.
- [30] A. Ribeiro and G. B. Giannakis, “Bandwidth-constrained distributed estimation for wireless sensor networks—Part I: Gaussian case,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, no. 3, pp. 1131–1143, 2006.
- [31] C. Tepedelenlioglu, M. K. Banavar, and A. Spanias, “Asymptotic analysis of distributed estimation over fading multiple access channels,” in *Proc. 41st Asilomar Conf. Signals, Syst. Comput.*, pp. 2140–2144, 2007.
- [32] A. Khalili, A. Rastegarnia, and S. Sanei, “Performance analysis of incremental LMS over flat fading channels”, to be published in *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, D2016, OL 10.1109/TCNS.2016.2516826.
- Signals, Systems and Computers*, Pacific Grove, CA, pp. 1930–1934, 2010.
- [6] K. Eftaxias, S. Sanei, and A. H. Sayed, “Modeling brain cortical connectivity using diffusion adaptation,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing (ICASSP)*, pp. 959–962, 2013.
- [7] A. Khalili, A. Rastegarnia, M. K. Islam, and Z. Yang, “A bio-inspired cooperative algorithm for distributed source localization with mobile nodes,” in *Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, pp. 3515–3518, 2013.
- [8] P. Di Lorenzo, S. Barbarossa, and A. H. Sayed, “Distributed spectrum estimation for small cell networks based on sparse diffusion adaptation,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 20, no. 12, pp. 1261–1265, 2013.
- [9] H. Nosrati, M. Taheri, M. Shamsi, MH. Sedaaghi, “Adaptive power spectral estimation using distributed wireless sensor networks,” *9th International Symposium on Communication Systems, Networks & Digital Signal Processing (CSNDSP)*, Manchester, pp. 128 – 133, 2014.
- [10] C. G. Lopes and A. H. Sayed, “Incremental adaptive strategies over distributed networks,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 8, pp. 4064–4077, 2007.
- [11] M. Saeed and A. U. H. Sheikh, “A new LMS strategy for sparse estimation in adaptive networks,” in *Proc 23rd International Symposium on Personal Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC)*, pp. 1722–1733, 2012.
- [12] M. S. E. Abadi and A.-R. Danaee, “Low computational complexity family of affine projection algorithms over adaptive distributed incremental networks,” *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, vol. 68, no. 2, pp. 97 – 110, 2014.
- [13] A. Khalili, A. Rastegarnia, W. Bazzi, and Z. Yang, “Derivation and analysis of incremental augmented complex least mean square algorithm,” *IET Signal Processing*, vol. 9, no. 4, pp. 312–319, 2015.
- [14] C. G. Lopes and A. H. Sayed, “Diffusion least-mean squares over adaptive networks: Formulation and performance analysis,” *IEEE Trans. on Signal Process.*, vol. 56, no. 7, pp. 3122–3136, 2008.
- [15] O. Gharehshiran, V. Krishnamurthy, and G. Yin, “Distributed energy-aware diffusion least mean squares: Game-theoretic learning,” *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, vol. 7, no. 5, pp. 821–836, 2013.
- [16] X. Zhao and A. H. Sayed, “Distributed clustering and learning over networks,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 63, no. 13, pp. 3285–3300, 2015.
- [17] P. Di Lorenzo and S. Barbarossa, “Distributed least mean squares strategies for sparsity-aware estimation over gaussian markov random fields,” in *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 2014 IEEE International Conference on, pp. 5472–5476, 2014.
- [18] R. Arablouei, S. Werner, Y.-F. Huang, and K. Dogancay, “Distributed least mean-square estimation with partial diffusion,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 62, pp. 472–484, 2014.
- [19] M. O. Sayin and S. S. Kozat, “Single bit and reduced dimension diffusion strategies over distributed networks,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 20, pp. 976–979, 2013.
- [20] J. Chen, C. Richard, and A. H. Sayed, “Diffusion LMS over multitask networks,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 63, no. 11, pp. 2733–2748, 2015.
- [21] A. Khalili, M.A. Tinati, A. Rastegarnia, “Performance analysis of distributed incremental LMS algorithm with noisy links,” *International Journal of Distributed Sensor Networks*, vol. 2011, pp. 1–10, 2011.
- [22] A. Khalili, M.A., Tinati, A. Rastegarnia, “Steady-state analysis of incremental LMS adaptive networks with noisy links,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59, no.5, pp. 2416–2421, 2011.
- [23] A. Khalili, M.A. Tinati, A. Rastegarnia, J.A. Chambers “Transient analysis of diffusion least-mean squares adaptive networks with noisy channels,” *International Journal of*

زیر نویس‌ها

¹ Node

² Wireless sensor network

³ Adaptive networks

⁴ Adaptive decision making

⁵ Incremental

⁶ Diffusion

⁷ Hamilton

⁸ Noisy links

⁹ Least-mean squares

¹⁰ Energy conservation

¹¹ Mean-square deviation

¹² Excess mean-square error

¹³ Step size

¹⁴ Mean-square error (MSE)

¹⁵ Update

¹⁶ Flat fading

¹⁷ State space

¹⁸ Weighted norm

¹⁹ Kronecker