

# یک رویکرد جدید برای طراحی فیلتر هموارساز با استفاده از معادلات دیفرانسیل تاخیری

آرمان خیراتی رونیزی<sup>۱</sup>، استادیار

۱- گروه علوم کامپیوتر - دانشکده علوم پایه - دانشگاه دولتی فسا - فسا - ایران - a-kheirati@fasau.ac.ir

**چکیده:** از میان روش‌های حذف نویز سیگنال، فیلترهای هموارساز smoothness priors یا quadratic variation regularization توجه بسیار زیادی را در دهه گذشته به خود جلب کرده است. در این روش‌ها، سیگنال مطلوب با استفاده از یک روش بهینه‌سازی تخمین زده می‌شود که در آن از مشتقات سیگنال به عنوان عامل جریمه‌کننده استفاده می‌شود. اما این روش‌ها فقط برای تخمین سیگنال‌های توانی (polynomial signals) مفید هستند. در نتیجه بازدهی آن‌ها در تخمین سیگنال‌های غیرتوانی کاهش می‌یابد. برای جبران این محدودیت، در این مقاله، یک رویکرد جدید برای طراحی فیلتر هموارساز پیشنهاد می‌شود که بر پایه معادله دیفرانسیل تاخیری می‌باشد. در این رویکرد، به جای مشتقات سیگنال از معادله دیفرانسیل تاخیری به عنوان عامل جریمه‌کننده استفاده می‌شود. به عنوان نمونه، از معادله دیفرانسیل تاخیری مدل MA در طراحی فیلتر هموارساز استفاده می‌شود. فیلتر هموارساز MA پیشنهادی در حوزه فرکانس آنالیز شده و نشان داده می‌شود که این فیلتر برای مقادیر کوچک اندازه پنجره، یک رفتار خوب در باند فرکانسی گذر و باند فرکانسی توقف از خود نشان می‌دهد. به عنوان یک کاربرد عملی، فیلتر هموارساز پیشنهادی برای حذف نویز سیگنال‌های قلبی به کار گرفته می‌شود. این روش، روی داده‌های واقعی موجود در پایگاه داده PhysioNet PTB آزمایش شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های قبلی، بهتر عمل می‌کند.

**واژه‌های کلیدی:** معادله دیفرانسیل تاخیری، میانگین‌گیر، فیلتر هموارساز، تخمین.

## A New Approach based Delay Differential Equation To Smoothing Filter Design

Arman Kheirati Roonizi<sup>1</sup>, Assistant Professor

1-Faculty of Computer Science, Fasa University, Fasa, Iran, Email: a-kheirati@fasau.ac.ir

**Abstract:** Among the techniques that are used for signal denoising, smoothing filters have received significant attention during the past. However, these methods are particularly suited for polynomial signal smoothing. Therefore, their performance is significantly decreased for signals that cannot be well modelled with a polynomial function. To overcome this limitation, in this paper, we propose a new approach to smoothing filter design, which is based on the delay differential equation model. In this approach, we propose to substitute the derivative of the signal with a DDE model of the signal. As an example, a delay differential equation of moving average (MA) model is used as penalty term in the optimization problem. The results indicate that a better solution can be found by appropriate balancing a trade-off between the MA model of the signal and the minimum mean square error. The proposed MA smoothing filter is analyzed in frequency domain. It is shown that the proposed MA smoothing filter displays good properties within its pass-band and stop-band bands for small values of window length. As an application, the proposed MA smoothing filter was used for electrocardiogram (ECG) signal denoising. We tested the method over data from the PhysioNet PTB database. The results show that the proposed MA smoothing filter outperforms the original smoothness priors or QV regularization.

**Keywords:** Delay differential equation, Smoothing filter design, estimation.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۶/۲۰

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۴۰۰/۱۲/۱۴

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۱۲/۱۵

نام نویسنده مسئول: آرمان خیراتی رونیزی

نشانی نویسنده مسئول: ایران - فسا - بلوار معلم - دانشگاه فسا - دانشکده مهندسی، گروه علوم کامپیوتر.



## ۱- مقدمه

در کاربردهای واقعی، سیگنال‌ها معمولاً با نویز آغشته می‌شوند که کیفیت سیگنالهای ثبت شده را پایین می‌آورد. بنابراین مسأله تخمین سیگنال مطلوب از داده‌های نویزی همواره برای پژوهشگران یک مسأله مهم و چالش برانگیز بوده است.

مسأله حذف نویز و بازیافت سیگنال مطلوب، یک قسمت عمده از پردازش سیگنال است که بر پایه فرضیاتی بر اطلاعات سیگنال و اطلاعات نویز می‌باشد. تاکنون روش‌های زیادی برای حذف نویز ارائه شده است از جمله: فیلتر میان‌گذر که فرکانس‌های نامطلوب بالا و پایین را حذف می‌کند [۳-۱]؛ فیلتر Savitzky-Golay که عمل هموارسازی را با استفاده از تخمین چند جمله‌ای انجام می‌دهد [۴]؛ روش SURE که یک تخمین زننده میانگین مربعات خطاست [۵] و روش EMD که به صورت وقفی سیگنال را با استفاده از روش sifting به اجزای نوسان کننده تقسیم می‌کند [۶]؛ روش wavelet که عمل حذف نویز را با استفاده از آستانه‌گیری در محیط wavelet انجام می‌دهد [۷]. علاوه بر روش‌های اشاره شده، روش quadratic variation (QV) یا smoothness priors توجه بسیار زیادی را در زمینه پردازش سیگنال تصویر به خود جلب کرده اند [۱۵-۱۰]. در این الگوریتمها سیگنال مطلوب با حل یک مسأله بهینه سازی تخمین زده می‌شود که در آن از مشتق سیگنال به عنوان یک عامل محدود کننده (جریمه کننده) استفاده می‌شود. جواب مسأله به یک پارامتر بهینه سازی بستگی دارد که نقش آن برقراری توازن بین میزان همواری سیگنال تخمین زده شده و خطای تخمین می‌باشد.

در تحقیقات اخیر نشان داده شده است که پارامتر بهینه سازی متناسب با فرکانس قطع فیلتر مورد نظر می‌باشد [۱۶]. در واقع در [۱۶]، یک روش جدید برای پیاده سازی QV ارائه شده است که بر پایه روش Bilinear Transform می‌باشد. این روش در مقایسه با روشهای قبل که بر پایه impulse invariance می‌باشد، کارایی بالاتری دارد. در [۱۷ و ۱۶]، همچنین نشان داده شده است که روش بهبود یافته ارتباط نزدیکی به فیلترهای خطی دارد. قابل ذکر است که فیلترهای خطی، ابتدا در حوزه فرکانس پیاده سازی شده و سپس خروجی آنها با استفاده از روش کانولوشن در حوزه زمان محاسبه می‌گردد. اگر چه در تحقیقات اخیر از روش QV یا smoothness priors به عنوان یک روش توانمند برای حذف نویز سیگنالها استفاده می‌شود، اما این روشها از محدودیتهایی برخوردار است. از جمله اینکه این روشها فقط برای هموار سازی سیگنالهای توانی (polynomial signals) کاربرد دارند. در [۱۸] روشهای مذکور برای طراحی یک فیلتر میان نگذر گسترش داده شدند. اما در واقعیت سیگنالهای زیادی وجود دارند که نمی‌توان آنها را با مدل‌های سری توانی تقریب زد. به عنوان مثال، سیگنال سینوسی یا سیگنال نمایی را نمی‌توان با سری توانی تقریب زد یا یک سری با درجه خیلی بالا مورد نیاز است.

برای غلبه بر این محدودیت، در این مقاله یک روش جدید برای پیاده سازی فیلترهای هموار ساز پیشنهاد می‌شود که بر پایه معادله دیفرانسیل تاخیری می‌باشد. در این روش، پیشنهاد می‌شود که به جای استفاده از مشتقات سیگنال، از معادله دیفرانسیل تاخیری به عنوان عامل محدود کننده در مسأله بهینه سازی استفاده شود. روش پیشنهادی یک روش جامع است که قابل تعمیم برای سیگنالهای متعددی است. به عنوان نمونه از معادله تاخیری مدل MA برای طراحی فیلتر هموار ساز استفاده می‌شود. فیلتر هموار ساز MA به طور جزئی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته و نشان داده می‌شود که روش QV یک حالت خاص از روش پیشنهادی می‌باشد. لازم به ذکر است که روش total variation denoising، نیز روشی دیگر برای هموار سازی سیگنالهای توانی قطعه قطعه ای (piecewise polynomial smoothing) می‌باشد که در مقایسه با روش ارایه شده در این مقاله یک روش غیر خطی است. خوانندگان علاقه مند می‌توانند به مقاله [۱۹] رجوع کنند. بقیه محتوای مقاله به قرار زیر است: از آنجایی که روش پیشنهادی بر پایه استفاده از معادله دیفرانسیل تاخیری در مسأله هموار سازی است، در بخش دوم، روش هموار سازی بازنگری می‌شود. در بخش سوم، روش پیشنهادی ارایه شده و به عنوان نمونه یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول از مدل MA، برای باز نویسی مسأله بهینه سازی پیشنهاد می‌گردد که منجر به طراحی یک فیلتر هموار ساز MA با بیشترین هموار سازی در قسمت باند توقف می‌گردد. در بخش چهارم، معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر از مدل MA برای طراحی فیلتر هموار ساز استفاده می‌گردد. در بخش پنجم، به عنوان یک کاربرد عملی، از روش پیشنهادی برای حذف نویز سیگنال الکتروکاردیوگرام (ECG) استفاده می‌شود و در پایان، نکات کلی مورد بحث قرار می‌گیرد.

## ۲- پیش زمینه:

مسأله هموار سازی: هدف از طراحی فیلترهای هموار ساز، تخمین سیگنال  $x(t)$  در مدل زیر می‌باشد [۱۰، ۱۱]:

$$y(t) = x(t) + v(t), \quad t \in [a, b] \quad (1)$$

که در آن  $v(t)$  نویز مشاهدات می‌باشد که مستقل از سیگنال  $x(t)$  می‌باشد. الگوریتم QV الگوریتمی است که سیگنال مطلوب را با حل مسأله بهینه سازی زیر تخمین می‌زند:

$$\hat{x}(t) = \arg \min_{x(t)} \int_a^b [y(\tau) - x(\tau)]^2 d\tau + \lambda \int_a^b [D^p x(\tau)]^2 d\tau \quad (2)$$

که در آن  $D^p x(t) = \frac{d^p}{dt^p} x(t)$  مشتق مرتبه  $p$  سیگنال  $x$  و  $\lambda$  پارامتر بهینه سازی می‌باشد. همانطور که در [۱۷، ۱۶] نشان داده شده است  $\lambda$  با فرکانس قطع فیلتر هموار ساز متناسب است. به عبارت دیگر در مسأله هموار ساز QV دو پارامتر  $\lambda$  و  $p$  به ترتیب متناسب با فرکانس قطع و مشتقات سیگنال هستند. یکی از محدودیتهای (۲) این است که این روش برای تخمین سیگنالهای توانی کاربرد دارد. دلیل آن این است که مشتق مرتبه  $p$  یک تابع توانی از مرتبه  $p-1$  صفر می‌باشد. اما سیگنالهای زیادی در واقعیت وجود دارند که نمی‌توان آنها را با سری

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} y(\tau) d\tau \quad (8)$$

که در آن T اندازه پنجره می باشد. بامشتگیری از دو طرف رابطه (۸)، رابطه زیر بدست می آید:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \frac{1}{T} [y(t + \frac{T}{2}) - y(t - \frac{T}{2})] \quad (9)$$

پاسخ فرکانسی فیلتر MA عبارتست از

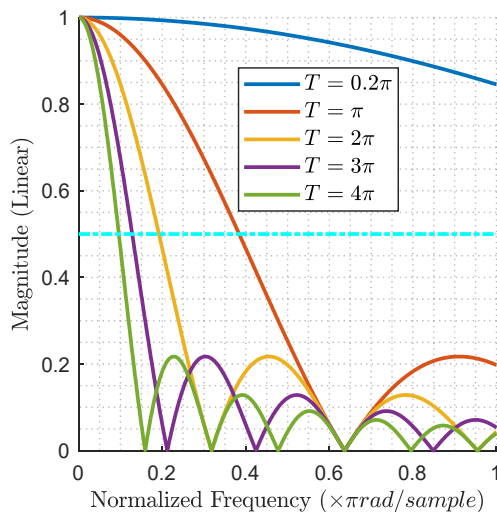
$$\psi(\omega) = \frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}} \quad (10)$$

پاسخ فرکانسی موردنظر به شکل تابع sinc می باشد. در طراحی ایده آل، ما به دنبال فیلتری هستیم که در قسمت گذر دارای دامنه ۱ و در قسمت قطع دارای دامنه صفر باشد. اما در کاربردهای عملی، رسیدن به این هدف چندان آسان نیست و فیلتر طراحی شده و فیلتر ایده آل باهم اختلاف دارند. به عنوان مثال، پاسخ فرکانسی یک فیلتر MA در شکل (۱) نشان داده شده است. همانطور که از شکل مشخص است فیلتر MA یک فیلتر پایین گذر است که پاسخ فرکانسی آن از پاسخ فرکانسی یک فیلتر حالت ایده آل خیلی دور است. همانطور که گفته شد یک فیلتر ایده آل در باند فرکانسی گذر ۱ و در باند فرکانسی قطع صفر می باشد.

مشکلات دیگر عبارتند از اینکه فیلتر به کندی از ناحیه گذر به ناحیه قطع می رود و در ناحیه قطع، فیلتر نوسان دارد. از جمله مشکلات دیگر این است که فرکانس قطع سیگنال با طول پنجره تغییر می کند. در ادامه مقاله، در طراحی فیلتر هموار ساز از معادله دیفرانسیل تاخیری مدل MA استفاده می شود.

### ۳-۲- فیلتر هموار ساز MA:

در این بخش، یادآوری می شود که چطور یک مدل MA با معادله دیفرانسیل تاخیری مرتبه اول توصیف می شود. سپس معادله



شکل ۱: پاسخ فرکانسی یک فیلتر MA برای مقادیر مختلف T

توانی تقریب زد. برای غلبه بر این محدودیت، در این مقاله، پیشنهاد می شود به جای مشتق سیگنال در (۲)، از معادله دیفرانسیل تاخیری به عنوان عامل محدود کننده استفاده شود. به عنوان نمونه مدل تاخیری MA برای طراحی فیلتر هموار ساز استفاده می شود.

### ۳- روش پیشنهادی:

معادله دیفرانسیل تاخیری زیر را در نظر می گیریم:

$$\frac{d}{dt} x(t) + \alpha_0 x(t) + \sum_{i=1}^m \alpha_i x(t - T_i) = 0, \quad (3)$$

که در آن  $T_i$  تاخیرها و  $\alpha_i$  ضرایب معادله می باشند. در این مقاله، پیشنهاد می شود که در طراحی فیلتر هموار ساز از (۳) به عنوان عامل محدود کننده استفاده شود. در این صورت، سیگنال مطلوب از حل معادله زیر بدست می آید:

$$\hat{x}(t) = \underset{x(t)}{\operatorname{argmin}} \int_a^b [y(\tau) - x(\tau)]^2 d\tau + \lambda \int_a^b \left( \frac{d}{dt} x(\tau) + \alpha_0 x(\tau) + \sum_{i=1}^m \alpha_i x(\tau - T_i) \right)^2 d\tau \quad (4)$$

معادله (۴) می تواند به شکل زیر نمایش داده شود:

$$\hat{x} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \|y(t) - x(t)\|^2 + \lambda \|f(t) * x(t)\|^2 \quad (5)$$

که در آن \* و || به ترتیب کانولوشن و نرم اقلیدوسی هستند و

$$f(t) = \frac{d}{dt} \delta(t) + \alpha_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \delta(t - T_i) \quad (6)$$

$\delta(t)$  تابع دیراک می باشد. جواب بهینه برای (۵) عبارت است از:

$$[17, 16]$$

$$\hat{x}(t) = [\delta(t) + \lambda f(-t) * f(t)] \otimes y(t), \quad (7)$$

که  $\otimes$  بیانگر عملگر deconvolution می باشد. اثبات رابطه (۷) و

بهینه بودن آن در قسمت پیوست گنجانده شده است. در ادامه به عنوان نمونه، از معادله دیفرانسیل تاخیری پیشنهادی برای طراحی یک فیلتر هموار ساز استفاده می شود. به عنوان نمونه، از معادله دیفرانسیل تاخیری مدل MA به عنوان عامل جریمه کننده استفاده می شود. نشان داده می شود که این روش، هم باعث بهبود فیلتر MA می شود و هم باعث بهبود روش QV می گردد.

### ۳-۱- فیلتر MA:

فیلتر MA به عنوان یک فیلتر پایین گذر، یکی از معمول ترین فیلترهایی است که در پردازش سیگنالهای دیجیتال استفاده می شود. این فیلتر معمولاً برای هموار سازی و یا جداسازی سیگنالهای با تغییرات زیاد (تند) و سیگنالهای با تغییرات کم (کند) استفاده می شود. این فیلتر در کاربرد های فراوانی از جمله پردازش سیستمهای قدرت، ارتباطات، کنترل، گفتار و صوت، سیگنالهای پزشکی و تصویر استفاده می گردد [۲۶-۲۰].

یک فیلتر MA با ورودی  $y(t)$  و خروجی  $\tilde{x}(t)$  با معادله پیوسته در زمان زیر توصیف می گردد:

معادله (۱۹) در حوزه فرکانس به شکل زیر توصیف می‌شود:

$$G_{I,T}(j\omega) = \frac{1}{1 + \lambda \left( \omega - \frac{2}{T} \sin \frac{\omega T}{2} \right)^2} \quad (21)$$

رابطه (۲۱) یک پاسخ فرکانسی دارای فاز صفر می‌باشد. چنانچه یک فیلتر هموارساز با فرکانس قطع 6 dB مطلوب باشد می‌توان پارامتر  $\lambda_c$  را از معادله زیر بدست آورد:

$$\frac{1}{1 + \lambda_c \left( \omega_c - \frac{2}{T} \sin \frac{\omega_c T}{2} \right)^2} = \frac{1}{2} \quad (22)$$

که در آن  $\omega_c = 2\pi \frac{f_c}{f_s}$ . این منجر به جواب بهینه زیر برای  $\lambda$  می‌گردد:

$$\lambda_c = \frac{1}{\left( \omega_c - \frac{2}{T} \sin \frac{\omega_c T}{2} \right)^2} \quad (23)$$

سرانجام، پاسخ فرکانسی فیلتر پیشنهادی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$G_{I,T}(j\omega) = \frac{1}{1 + \left( \frac{\omega - \frac{2}{T} \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega_c - \frac{2}{T} \sin \frac{\omega_c T}{2}} \right)^2} \quad (24)$$

پاسخ فرکانس فیلتر هموارساز به ازای مقادیر مختلف  $\omega_c$  در شکل (۲) نشان داده شده است. در حالیکه روش QV یک حالت خاص از روش پیشنهادی می‌باشد، روش پیشنهادی، برای مقادیر کوچکتر T در باندگذر به ۱ و در باندتوقف به صفر میل می‌کند.

#### ۴- مدل بهبود یافته:

به منظور بهبود دادن بیشتر فیلتر پیشنهادی، در این بخش، معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر MA در مساله بهینه سازی استفاده می‌گردد. بامشتق گیری مرتبه pام از معادله (۸)، معادله دیفرانسیل زیر برای مدل MA به دست می‌آید:

$$D^p \hat{x}(t) = \frac{1}{T} D^{p-1} [y(t + \frac{T}{2}) - y(t - \frac{T}{2})] \quad (25)$$

با توجه به الگوریتم ارائه شده در بخش قبل داریم:

$$D^p x(t) = \frac{1}{T} D^{p-1} \left[ x(t + \frac{T}{2}) - x(t - \frac{T}{2}) \right] + w(t) \quad (26)$$

اگر معادله (۲۶) را به عنوان عامل جریمه کننده در مساله بهینه سازی استفاده کنیم و سپس مساله بهینه سازی را حل کنیم به راه حل زیر می‌رسیم:

$$\hat{x}(t) = \left[ \delta(t) + \lambda f_p(-t) * f_p(t) \right]^{\otimes} * y(t) \quad (27)$$

پاسخ فرکانسی مرتبه p فیلتر هموارساز MA به صورت زیر است:

$$g_p(t) = \left[ \delta(t) + \lambda f_p(-t) * f_p(t) \right]^{\otimes} \quad (28)$$

در این حالت، تابع تبدیل فیلتر عبارت است از

$$G_{p,T}(s) = \frac{1}{1 + \lambda F_p(s) F_p(-s)} \quad (29)$$

که در آن

دیفرانسیل بدست آمده به عنوان یک عامل محدود کننده در مساله بهینه سازی استفاده می‌گردد.

#### ۳-۲-۱- معادله دیفرانسیل مرتبه اول برای مدل MA:

بادرنظرگرفتن اینکه خروجی مدل MA در رابطه (۸) یک تقریب از سیگنال مطلوب است، می‌توان رابطه زیر را در نظر گرفت:

$$x(t) = \hat{x}(t) + e(t) \quad (11)$$

که  $e(t)$  خطای مدل می‌باشد. بنابراین می‌توان مدل زیر را برای سیگنال در نظر گرفت:

$$Dx(t) = \frac{1}{T} \left[ x(t + \frac{T}{2}) - x(t - \frac{T}{2}) \right] + w(t) \quad (12)$$

که  $w(t)$  تابعی از  $e(t)$  و  $v(t)$  می‌باشد. بنابراین یک عامل محدود کننده جدید برای راه حل، می‌تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$\int_a^b \left[ Dx(t) - \frac{1}{T} \left[ x(t + \frac{T}{2}) - x(t - \frac{T}{2}) \right] \right]^2 \tau \quad (13)$$

ما پیشنهاد می‌دهیم که سیگنال مطلوب با استفاده از روش زیر تخمین زده شود:

$$\hat{x}(t) = \arg \min_{x(t)} \int_a^b [y(\tau) - x(\tau)]^2 \tau + \lambda \int_a^b \left[ Dx(t) - \frac{1}{T} \left[ x(t + \frac{T}{2}) - x(t - \frac{T}{2}) \right] \right]^2 \tau \quad (14)$$

در این مساله بهینه سازی، رابطه (۱۴) می‌تواند به عنوان یک ایجاد کننده توازن بین خطای مدل MA و خطای بین سیگنال مشاهدات و سیگنال تخمین تفسیر شود. رابطه (۱۴) می‌تواند بصورت زیر بازنویسی شود:

$$\hat{x}(t) = \arg \min_{x(t)} \left\| [y(t) - x(t)] \right\|^2 + \lambda \left\| [f_1(t) * x(t)] \right\|^2 \quad (15)$$

و

$$f_1(t) = D\delta(t) - \frac{1}{T} \left[ \delta(t + \frac{T}{2}) - \delta(t - \frac{T}{2}) \right] \quad (16)$$

که در آن  $\delta(t)$  تابع دیراک می‌باشد. جواب بهینه برای (۱۵) به صورت زیر است:

$$\hat{x}(t) = \left[ \delta(t) + \lambda f_1(t) * f_1(-t) \right]^{\otimes} * y(t) \quad (17)$$

بنابراین پاسخ ضربه فیلتر پیشنهادی عبارت است از

$$g_1(t) = \left[ \delta(t) + \lambda f_1(t) * f_1(-t) \right]^{\otimes} \quad (18)$$

#### ۳-۲-۲- آنالیز در حوزه فرکانس: با اعمال تبدیل لاپلاس برای

معادله (۱۸) تابع تبدیل فیلتر MA پیشنهادی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$G_I(s) = \frac{1}{1 + \lambda F_I(s) F_I(-s)} \quad (19)$$

که در آن

$$F_I(s) = s - \frac{e^{\frac{sT}{2}} - e^{-\frac{sT}{2}}}{T} \quad (20)$$

حالت گسسته در زمان آن مورد نیاز است. در این بخش، فیلتر هموار ساز پیشنهادی در حوزه زمان گسسته پیاده سازی شده است. برای این منظور ما فرض می‌کنیم که  $y_k = y(kT_s)$  نمونه های گسسته در زمان سیگنال  $y(t)$ ،  $x_k$  سیگنال مورد نظر و  $v_k$  نویز مشاهدات می‌باشد.

$$y_k = x_k + v_k, \quad k=1, \dots, L. \quad (34)$$

روش های مختلفی وجود دارد که می‌توانیم برای تقریب تفاضلی عملگر مشتق استفاده کنیم. در این بخش، مشتق را با استفاده از فرمول تفاضل مرکزی تقریب می‌زنیم. در این حالت معادله تفاضلی مدل MA، بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$(z-z^{-1})^{p-1} \left( z-z^{-1} - \frac{1}{q}(z^q-z^{-q}) \right) x_k = w_k, \quad (35)$$

که در آن  $T_s = \frac{T}{2}$ ،  $q = \frac{T}{2T_s}$  دوره تناوب و  $z^{-i}x_k = x_{k-i}$  مشابه حالت پیوسته در زمان، تخمین  $x_k$  را می‌توان با حل مسئله بهینه سازی زیر پیدا کرد:

$$\hat{x}_k = \underset{x_k}{\operatorname{argmin}} \sum_{j=1}^L (y_j - x_j)^2 + \lambda \sum_{j=1}^L \left( (z-z^{-1})^{p-1} \left( z-z^{-1} - \frac{1}{q}(z^q-z^{-q}) \right) x_k \right)^2, \quad (36)$$

$$F_p(s) = s^{p-1} \left( s - \frac{\frac{T}{2} - \frac{T}{2}}{T} \right) \quad (30)$$

رابطه (۲۹) در حوزه فوری به شکل زیر می‌باشد:

$$G_{p,T}(j\omega) = \frac{1}{1 + \lambda \left( \omega^{p-1} \left( \omega - \frac{\sin \omega \frac{T}{2}}{T} \right) \right)^2} \quad (31)$$

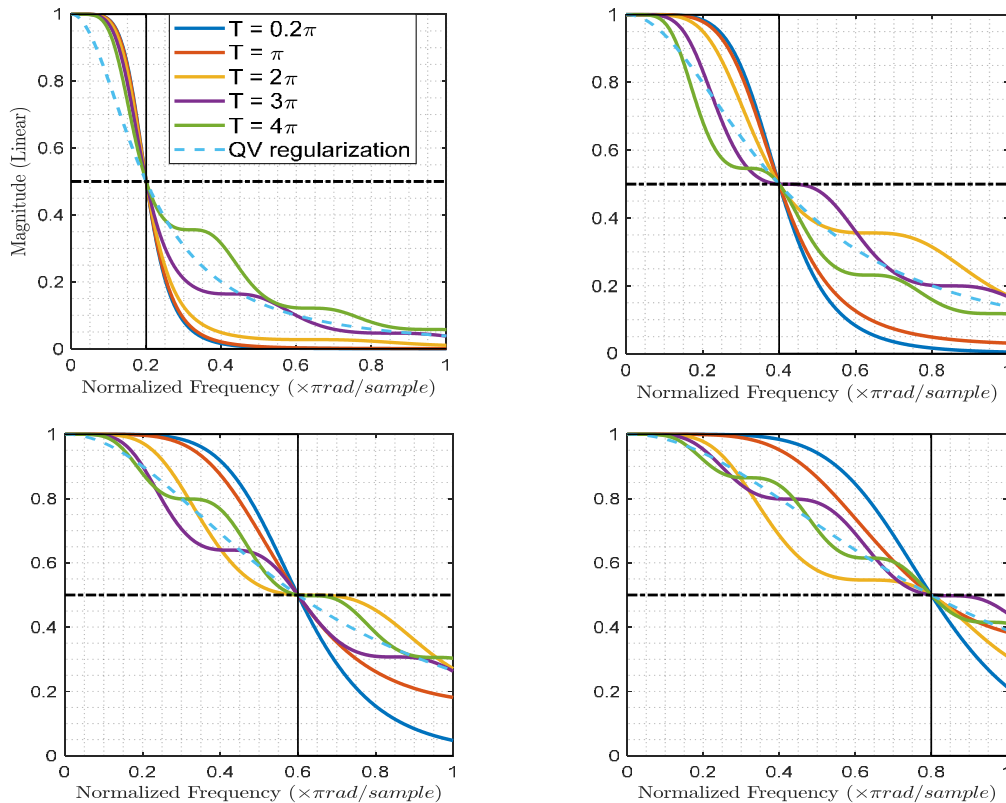
مقدار پارامتر  $\lambda$  برای یک فرکانس قطع ویژه  $\omega_c$  عبارت است از:

$$\lambda_c = \frac{1}{1 + \left[ \omega_c^{p-1} \left( \omega_c - \frac{2 \sin(\omega_c T/2)}{T} \right) \right]^2} \quad (32)$$

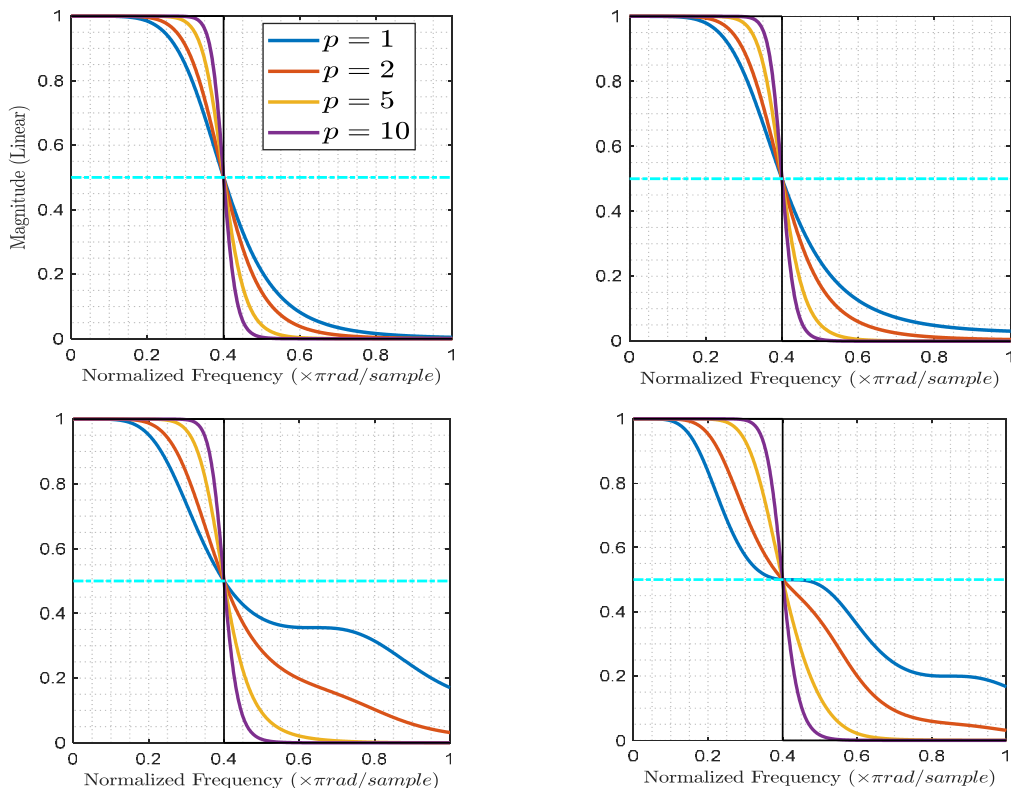
پاسخ فرکانسی فیلتر پیشنهادی برای  $\omega_c = 0.4$  و  $p = 1, 2, 5, 10$  و مقادیر مختلف طول پنجره ( $T$ ) در شکل (۳) نمایش داده شده است. واضح است که با افزایش  $p$ ، پاسخ فیلتر در باند گذر به یک و در باند توقف به صفر میل می‌کند. به عبارت دیگر پاسخ فرکانسی فیلتر پیشنهادی برای مقادیر بزرگ  $p$  به حالت ایده‌آل نزدیک می‌شود. برای مقادیر بزرگ  $T$  وقتی که بی‌نهایت بزرگ باشد، تابع تبدیل به شکل زیر است:

$$G_{I,\infty}(\omega) = \frac{1}{1 + \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2p}} \quad (33)$$

اگرچه فیلتر هموار ساز پیشنهادی در حالت پیوسته در زمان طراحی و آنالیز شد ولی برای پیاده سازی و استفاده در کامپیوترهای دیجیتال،



شکل ۲: پاسخ فرکانسی فیلتر MA پیشنهادی برای مقادیر مختلف T



شکل ۳: پاسخ فرکانسی فیلتر MA پیشنهادی برای مقادیر مختلف  $p$  و مقادیر مختلف  $T$ . مقادیر اندازه پنجره به ترتیب در شکل بالا سمت چپ  $T = 2\pi$ ، شکل بالا سمت راست  $T = \pi$ ، شکل پایین سمت چپ  $T = 2\pi$ ، شکل پایین سمت راست  $T = 3\pi$ .

برای این منظور، ماسیگنالهای مصنوعی را با استفاده از روش

سینوسی که به صورت زیر تعریف می‌گردد شبیه سازی کردیم:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \cos(2\pi f_i t + \phi_i) \quad (40)$$

که  $c_i$ ،  $f_i$ ،  $\phi_i$  به ترتیب دامنه، فرکانس و فاز تابع سینوسی  $i$ ام می باشد. در شبیه سازی فرمول (۴۰) تعداد جملات ( $N$ ) ۱۰ در نظر گرفته شد.

ما ۲۵۰۰ سیگنال مصنوعی با طول ۲۰ ثانیه تولید کردیم. فرکانس های  $f_i$  به طور تصادفی بین صفر تا ۴۹ هرتز انتخاب گردید و  $fs = 600 \text{ Hz}$  در نظر گرفته شد. به عبارت دیگر، سیگنال دارای محدوده فرکانسی بین صفر و ۵۰ هرتز می باشد. در مرحله بعد نویز به سیگنال اضافه گردید. نویز های اضافه شونده با SNR های مختلف از صفر تا ۴۰ دسیبل تولید گردیدند.

نویز می تواند هر سیگنالی با محدوده فرکانسی بیشتر از ۵۰ هرتز باشد. در نتیجه یک فیلتر پایین گذر با فرکانس قطع 50Hz می تواند برای تخمین سیگنال مورد نظر استفاده گردد. از آن جایی که فیلتر هموارساز پیشنهادی یک فیلتر پایین گذر است، می تواند برای جدا سازی سیگنال مطلوب و نویز استفاده گردد. ما روش پیشنهادی را برای حذف نویز استفاده کرده و با روش QV مقایسه کردیم. خلاصه ای از نتایج بر روی داده های مصنوعی در شکل (۴) نشان داده شده است.

این معادله، می تواند به فرم ماتریسی زیر نوشته شود:

$$\hat{x} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \left\{ \|y - x\|^2 + \lambda \|D_{p,q} x\|^2 \right\} \quad (37)$$

که در آن  $x = [x_1, x_2, \dots, x_L]^T$ ،  $y = [y_1, y_2, \dots, y_L]^T$  و  $D_{p,q}$  به عنوان یک ماتریس Toeplitz با درایه های  $d_{p,q}$  تعریف می شود:

$$\begin{cases} d_0 = [1, 0, \dots, 0] \\ d_{1,q} = \left[ -\frac{1}{q}, \frac{0, \dots, 0}{q-2}, 1, 0, \dots, 0, \frac{0, \dots, 0}{q-2}, \frac{1}{q} \right] \\ d_{p,q} = d_{p-1,q} * d_0 \end{cases} \quad (38)$$

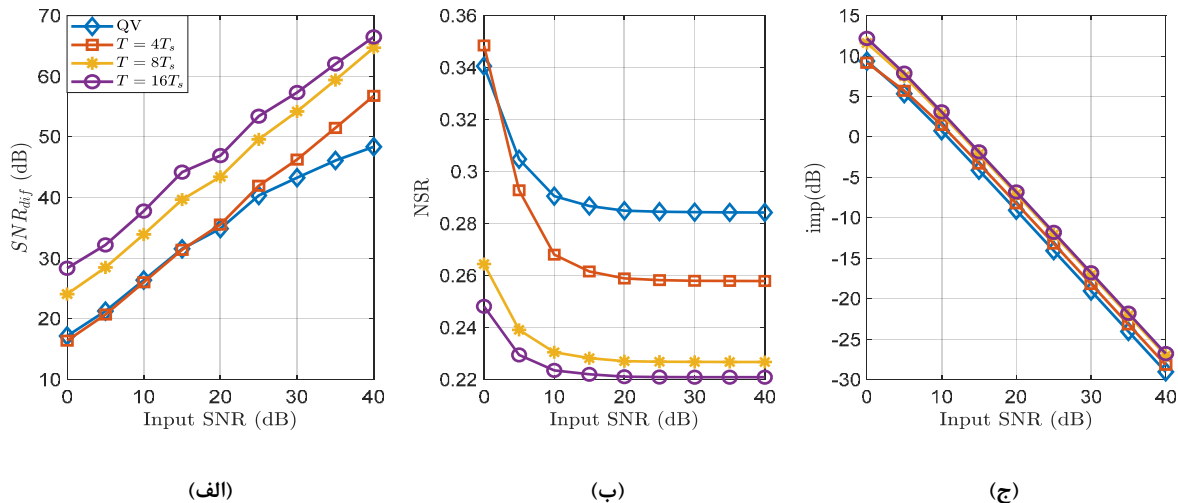
جواب عبارت است از

$$\hat{x} = (I + \lambda D_{p,q}^T D_{p,q})^{-1} y \quad (39)$$

که در آن  $I$  ماتریس همانی می باشد.

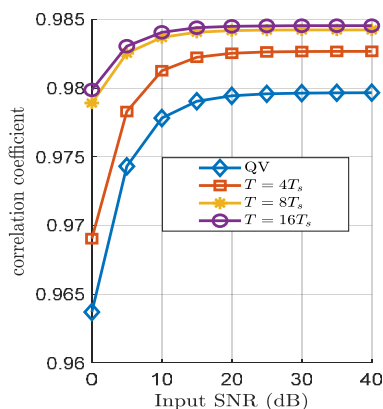
## ۵-نتایج:

۵-۱ - شبیه سازی داده مصنوعی: برای ارزیابی دقت روش پیشنهادی از داده های مصنوعی استفاده گردید که به ما اجازه می دهد به طور مستقیم خطای تخمین را به صورت کمی محاسبه کنیم. به عنوان یک کاربرد واقعی فیلتر مورد نظر برای حذف نویز سیگنالهای قلبی استفاده شد که در بخش بعد مورد بحث قرار می گیرد.



شکل ۴: حذف نویز سیگنال مصنوعی: مقایسه روش پیشنهادی با روش QV

۲-۵ - کاربرد در حذف نویز سیگنال ECG: سیگنال الکترو کاردیو گرام (ECG) یک سیگنال بیوالکتریک می باشد که فعالیت های الکتریکی قلب، که با استفاده از الکترودهایی که بر روی سطح پوست ثبت می شود، را نشان می دهد. از این سیگنال به عنوان یک سیگنال پایه برای تشخیص نارسایی های قلب استفاده می گردد که می تواند به پزشک در تشخیص و معاینه کمک کند. متأسفانه در حین ثبت سیگنال ECG سیگنال های دیگر که معمولاً مربوط به فعالیت های ماهیچه ای قلب می باشند ممکن است در ثبت سیگنال ECG تداخل ایجاد کنند. این سیگنال های غیر الکتریکی به عنوان نویز نامبرده می شوند که بعضی از آنها عبارتند از سیگنال تنفس یا سیگنال ماهیچه ای که حذف آنها امری ضروری است. به عنوان یک کاربرد عملی، فیلتر پیشنهادی برای حذف نویز سیگنال ECG استفاده شد و با روش QV که روشی جدید برای حذف نویز سیگنال ECG است [۱۱] مقایسه گردید. خلاصه ای از نتایج بر روی داده های PhysioNet [۲۸] در شکل (۵) نشان داده شده است.



شکل ۵: نتایج مقایسه حذف نویز سیگنال ECG با استفاده از پارامتر correlation coefficient

شکل (۴ الف) متوسط بهبود SNR را نمایش می دهد که هر چه مقدار آن بیشتر باشد نشانگر این است که سیگنال تخمین زده شده به سیگنال واقعی نزدیکتر است. در حالیکه NSR که نتایج آن در شکل (۴ ب) نشان داده شده است نمایانگر خطای تخمین می باشد:

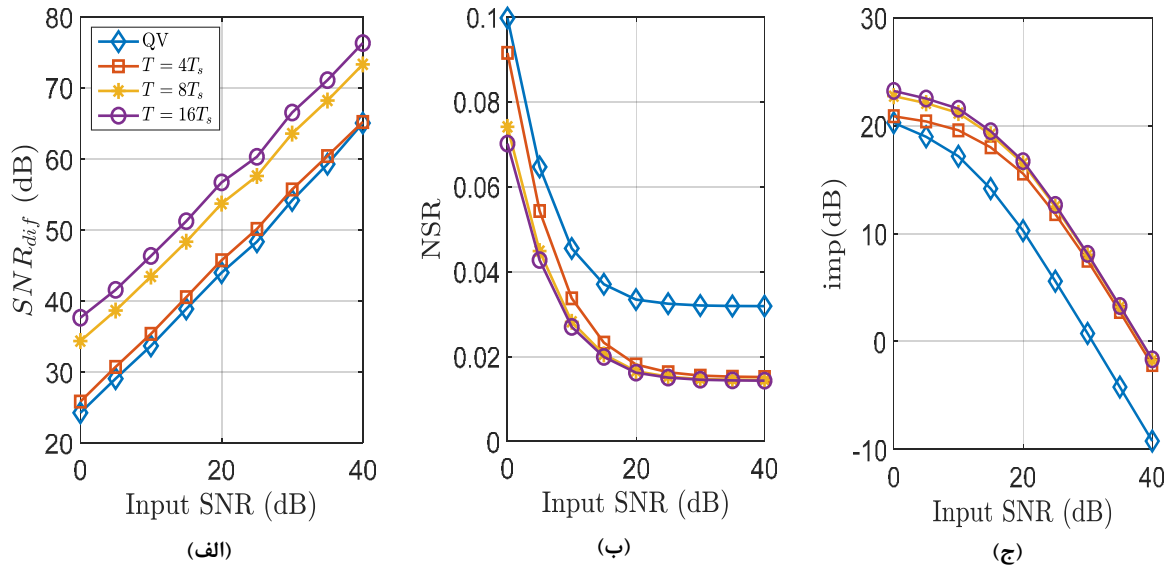
$$NSR = \left( \frac{\sum_k (x_k - \hat{x}_k)^2}{\sum_k x_k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (41)$$

که در آن سیگنال واقعی و  $\hat{x}_k$  سیگنال تخمین می باشد. هر چه مقدار NSR پایین تر باشد نشان دهنده این است که الگوریتم مورد نظر در تخمین سیگنال بهتر عمل کرده است.

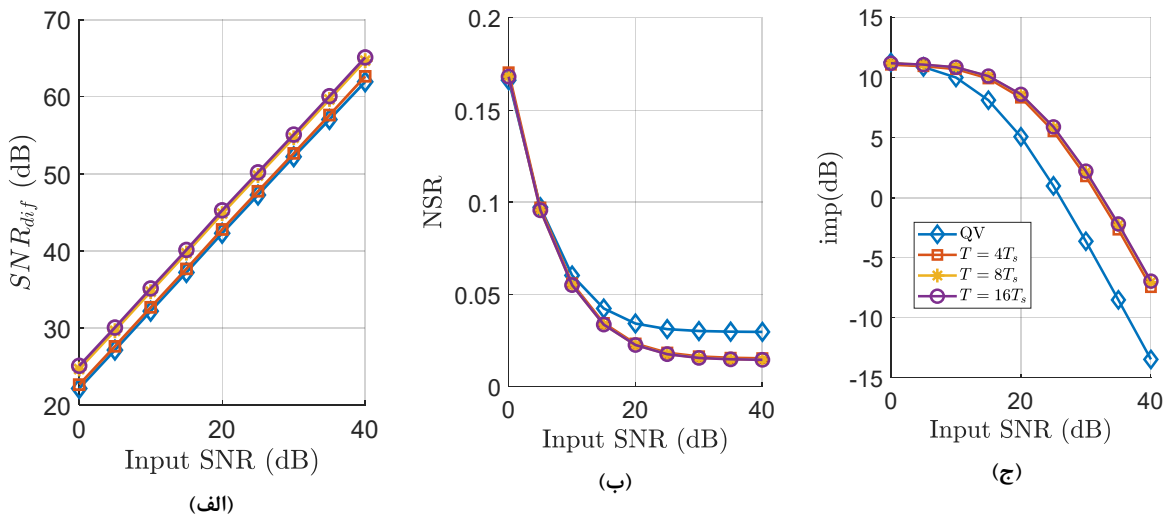
پارامتر سوم که برای مقایسه روشهای پیشنهادی مورد استفاده قرار گرفت  $imp$  می باشد که بیانگر نسبت خطای (نویز) مشاهدات به خطای تخمین است:

$$imp = -10 \log_{10} \left( \frac{\sum_k (x_k - \hat{x}_k)^2}{\sum_k (y_k - x_k)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (42)$$

مقادیر بدست آمده با این روش در شکل (۴ ج) نشان داده شده است. جزئیات این سه روش در منابع [۲۷-۲۸] توضیح داده شده است. همانطور که از شکل (۴) مشاهده می شود روش QV دارای خطای تخمین بیشتری نسبت به روش پیشنهادی است. بخصوص در شکل (۴ ب) پارامتر NSR که بیانگر خطای تخمین است نشان می دهد که روش پیشنهادی دارای خطای تخمین کمتری نسبت به روش QV است و این خطا با افزایش پارامتر T کاهش می یابد. نتایج مقایسه با استفاده از دو پارامتر دیگر هم حاکی از آن است که با افزایش پارامتر T، راندمان روش پیشنهادی در بازسازی و تخمین سیگنال سگنال اصلی افزایش می یابد. در شکل (۴ ج)، با افزایش T پارامتر  $imp$  روش پیشنهادی از روش QV بزرگتر می باشد که نشان می دهد خطای تخمین روش پیشنهادی با افزایش T کاهش می یابد. بنابراین، نتایج نشان می دهد که روش پیشنهادی نسبت به روش QV بهتر عمل می کند.



شکل ۶: نتایج مقایسه حذف نویز سیگنال ECG: روش پیشنهادی و روش QV



شکل ۷: حذف نویز گوسی سیگنال ECG: مقایسه روش پیشنهادی با روش QV

بازسازی کامل سیگنال، correlation coefficient باید ۱ باشد که در مورد روش پیشنهادی با افزایش پارامتر  $T$  به ۱ نزدیک می‌شود. نتایج مقایسه با پارامترهای قبل در شکل (۶) نشان داده شده است که حاکی از آن است که فیلتر پیشنهادی برای حذف نویز سیگنال ECG بهتر از روش QV عمل می‌کند. در آزمایش بعدی روش پیشنهادی برای حذف نویز تصادفی از سیگنال ECG استفاده شد. برای این منظور ما نویزهای تصادفی با SNR های مختلف از صفر تا ۴۰ دسیبل را به سیگنال ECG اضافه کردیم. سپس روش QV و روش پیشنهادی برای تخمین سیگنال مطلوب به کار گرفته شدند. نتایج مقایسه در شکل (۷)

سیگنالهای ECG دانلود شده از PhysioNet ابتدا پیش پردازش شدند. به این ترتیب که با یک فیلتر باترورت میانگذر با فرکانس قطع ۵ و ۵۰ هرتز نویزهای فرکانس بالا و پایین حذف گردیدند. سپس به سیگنالهای ECG نویز با SNR های متفاوت اضافه گردید. علاوه بر پارامترهای قبل، روشهای ذکر شده با استفاده از پارامتر correlation coefficient هم مقایسه شدند. نتایج مربوط به حذف نویز ECG در شکل (۵) گزارش شده است و تایید می‌کند که روش پیشنهاد شده در این مقاله از روشهای قبلی بهتر عمل می‌کند. در نظر داشته باشید که در صورت



نشان داده شده است. همانطور که دیده می شود در این مورد هم روش پیشنهادی دارای خطای کمتری نسبت به روش QV است.

### ۶- نتیجه گیری

در این مقاله یک روش جدید برای طراحی فیلترهای هموارساز ارائه شد که بر پایه مدل MA می باشد. در این رویکرد، از معادله دیفرانسیل مدل MA به عنوان یک عامل هموارساز در مسئله بهینه سازی استفاده شد. نتایج نشان داد که با استفاده از یک توازن مناسب بین خطای مدل و خطای تخمین، می توان به یک جواب بهتر دست یافت (به عنوان نمونه نشان داده شد با یک توازن مناسب بین خطای مدل MA و خطای تخمین، هم فیلتر MA و هم روش QV بهبود میابد). ما فیلتر هموارساز MA پیشنهادی را در حوزه فرکانس آنالیز کرده و نشان دادیم که این فیلتر برای مقادیر کوچک اندازه پنجره، یک رفتار خوب در باند فرکانسی گذر و باند فرکانسی توقف از خود نشان می دهد.

### پیوست الف

اثبات فرمول (۷)

معادله (۵) می تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$\hat{x}(t) = \underset{x(t)}{\operatorname{argmin}} \|y(t) - x(t)\|^2 + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta - \tau) x(\tau) d\tau \right]^2 d\theta \quad (43)$$

با مساوی قرار دادن مشتق معادله (۴۳) نسبت به  $x(t)$  با صفر، رابطه زیر بدست می آید:

$$-2[y(t) - x(t)] + 2\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta - t) \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta - \tau) x(\tau) d\tau d\theta = 0 \quad (44)$$

از طرف دیگر با داشتن رابطه

$$r(\theta) = f(\theta) * x(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta - \tau) x(\tau) d\tau \quad (45)$$

و جایگزاری آن در معادله (۴۴) به دست می آوریم:

$$-2[y(t) - x(t)] + 2\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta - t) r(\theta) d\theta = 0 \quad (46)$$

با در نظر داشتن

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta - t) r(\theta) d\theta = f(-t) * f(t) \quad (47)$$

و جایگزاری آن در فرمول (۴۶) رابطه زیر بدست می آید:

$$-2[y(t) - x(t)] + 2\lambda f(-t) * f(t) * x(t) = 0 \quad (48)$$

بعد از ساده سازی معادله بالا ما بدست می آوریم:

$$[\delta(t) + \lambda f(-t) * f(t)] * x(t) = y(t) \quad (49)$$

در نتیجه سیگنال مطلوب از رابطه (۷) بدست می آید.

### پیوست ب

فیلتر بهینه وینر برای تخمین سیگنالی که با معادله فضای حالت زیر توصیف می شود را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} \dot{f}(t) * x(t) = w(t) \\ y(t) = x(t) + v(t) \end{cases} \quad (50)$$

که در آن  $F(s)$  تبدیل لاپلاس تابع  $f(t)$ ،  $f(t)$  تابع توصیف شده با معادله (۶) می باشد. به آسانی می توان نشان داد که فیلتر بهینه وینر برای معادله (۵۰)، دارای تبدیل لاپلاس زیر است:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_w^2} F(s)F(-s)} \quad (51)$$

که در آن  $\sigma_w^2$  و  $\sigma_v^2$  به ترتیب واریانس نویز مشاهدات و مدل می باشند. از طرف دیگر پاسخ ضربه روش پیشنهادی (۷) دارای تبدیل لاپلاس زیر است:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \lambda F(s)F(-s)} \quad (52)$$

با مقایسه تبدیل لاپلاس روش پیشنهادی و فیلتر وینر نتیجه گرفته می شود که فیلتر وینر یک حالت خاص از روش پیشنهادی است وقتی داشته باشیم:

$$\lambda = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_w^2} \quad (53)$$

توسعه نتایج بالا به حالت گسسته آسان می باشد. فیلتر وینر برای تخمین سیگنالی که با معادله فضای حالت زیر توصیف می شود را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} f_k * x_k = w_k \\ y_k = x_k + v_k \end{cases} \quad (54)$$

که در آن  $f_k$  تخمین گسسته در زمان  $f(t)$  با یک روش دلخواه (مثلاً تفاضلات مرکزی) می باشد. در این حالت، فیلتر وینر دارای پاسخ فرکانسی زیر است:

$$G(z) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_w^2} F(z)F(1/z)} \quad (55)$$

از طرف دیگر چنانچه پاسخ فرکانسی روش پیشنهادی در حوزه فرکانس را در نظر بگیریم (به عنوان مثال معادله (۳۹) توصیف کننده مدل MA) به جواب زیر میرسیم:

$$G(z) = \frac{1}{1 + \lambda F(z)F(1/z)} \quad (56)$$

که نشان می دهد در حالت گسسته نیز، روش بهینه وینر یک حالت خاص از روش پیشنهادی است اگر رابطه (۵۳) برقرار باشد.

### مراجع

- [1] B. A. Sheno, Introduction to Digital Signal Processing and Filter Design. New York, NY, USA: Wiley-Interscience, 2005.
- [2] H. J. Blinichoff and A. I. Zverev, Filtering in the Time and Frequency Domains. Melbourne, FL, USA: Krieger Publishing Co., Inc., 1986.
- [3] E. Guest and N. Mijatovic, "Discrete-time complex bandpass filters for three-phase converter systems," IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 66, pp. 4650-4660, 2019.
- [4] R. W. Schafer, "What is a savitzky-golay filter? [lecture notes]," IEEE Signal Processing Magazine, vol. 28, no. 4, pp. 111-117, July 2011.
- [5] C. M. Stein, "Confidence sets for the mean of a multivariate normal distribution," Journal of the Royal Statistical Society. Series B Methodological, vol. 24, pp. 265-296, 1962.
- [6] Y. Kopsinis and S. McLaughlin, "Development of emd-based denoising methods inspired by wavelet thresholding," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 57, pp. 1351-1362, April 2009.

- [19] A. Kheirati Roonizi "ℓ<sub>2</sub> and ℓ<sub>1</sub> Trend Filtering: A Kalman Filter Approach," IEEE Signal Processing Magazine, vol. 38, no. 6, pp. 137-145, Nov. 2021
- [20] J. Wang, J. Liang, F. Gao, L. Zhang, and Z. Wang, "A method to improve the dynamic performance of moving average filter-based pll," IEEE Trans. Power Electron., vol. 30, pp. 5978-5990, Oct 2015.
- [21] S. Golestan, M. Ramezani, J. M. Guerrero, F. D. Freijedo, and M. Monfared, "Moving average filter based phase-locked loops: Performance analysis and design guidelines," IEEE Trans. Power Electron., vol. 29, pp. 2750-2763, June 2014.
- [22] L. J. Morales and Y. Shmaliy, "Moving average hybrid filter to the enhancing ultrasound image processing," IEEE Latin America Transactions, vol. 8, pp. 9-16, March 2010.
- [23] S. Salih, S. A. Aljunid, S. Aljunid, and O. Mask, "Adaptive Filtering Approach for Denoising Electrocardiogram Signal Using Moving Average Filter," J Med Imaging Health Inform, vol. 5, pp. 1065-1069, 2015.
- [24] L. Rabiner and B.-H. Juang, Fundamentals of Speech Recognition. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1993.
- [25] J. G. Proakis and D. G. Manolakis, Digital Signal Processing (3rd Ed.): Principles, Algorithms, and Applications. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1996.
- [26] R. C. Gonzalez and R. E. Woods, Digital Image Processing (3rd Edition). Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 2006.
- [27] E. Kheirati Roonizi and R. Sassi, "A Signal Decomposition Model- Based Bayesian Framework for ECG Components Separation," IEEE Trans. Signal Process., vol. 64, pp. 665-674, 2016.
- [28] O. Sayadi and M. B. Shamsollahi, "ECG Denoising and Compression Using a Modified Extended Kalman Filter Structure," in IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 55, no. 9, pp. 2240-2248, Sept. 2008.
- [29] A. L. Goldberger, L. A. N. Amaral, L. Glass, J. M. Hausdorff, P. C. Ivanov, R. G. Mark, J. E. Mietus, G. B. Moody, C.-K. Peng, and H. E. Stanley, "Physiobank, Physiobank, and Physionet: Components of a new research resource for complex physiologic signals," Circulation, vol. 101, pp. e215-e220, 2000.
- [7] D. L. Donoho and I. M. Johnstone, "Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage," J. Am. Stat. Assoc., vol. 90, pp. 1200-1224, 1995.
- [8] M. S. Crouse, R. D. Nowak, and R. G. Baraniuk, "Wavelet-based statistical signal processing using hidden markov models," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 46, pp. 886-902, April 1998.
- [9] D. L. Donoho, "De-noising by soft-thresholding," IEEE Transactions on Information Theory, vol. 41, pp. 613-627, May 1995.
- [10] R. Sameni, "Online filtering using piecewise smoothness priors: Application to normal and abnormal electrocardiogram denoising," Signal Processing, vol. 133, pp. 52-63, 2017.
- [11] A. Fasano and V. Villani, "Baselinewander removal for bioelectrical signals by quadratic variation reduction," Signal Processing, vol. 99, pp. 48-57, 2014.
- [12] V. Villani and A. Fasano, "Fast detrending of unevenly sampled series with application to hrv," Computers in Cardiology, vol. 40, pp. 417-420, 2013.
- [13] M. P. Tarvainen, P. O. Ranta-aho, and P. A. Karjalainen, "An advanced detrending method with application to hrv analysis," IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 49, no. 2, pp. 172-175, 2002.
- [14] X. Dong, D. Thanou, P. Frossard, and P. Vandergheynst, "Learning laplacian matrix in smooth graph signal representations," IEEE Trans. Signal Process., vol. 64, no. 23, pp. 6160-6173, 2016.
- [15] Y. J. Wang, J. Li, H. Xu, H. O. Yan, J. Yuan, J. H. Li, X. H. Liu, Q. Zhou, and N. Li, "Smoothness prior approach to removing nonlinear trends from signals in identification of low frequency oscillation mode," in Renewable Energy and Power Technology II, ser. Applied Mechanics and Materials, vol. 672. Trans Tech Publications, 11, pp. 1070-1074, 2014.
- [16] A. Kheirati Roonizi and C. Jutten, "Improved smoothness priors using bilinear transform," Signal Processing, vol. 169, p. 107381, 2020.
- [17] A. Kheirati Roonizi and C. Jutten, "Forward-backward filtering and penalized least-squares optimization: A unified framework," Signal Processing, vol. 178, p. 107796, 2021.
- [18] A. Kheirati Roonizi and C. Jutten, "Band-stop smoothing filter design," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 69, pp. 1797-1810, 2021.